

# Nemlineáris anyagviselkedés peridynamikus modellezése

Ladányi Gábor, PhD hallgató

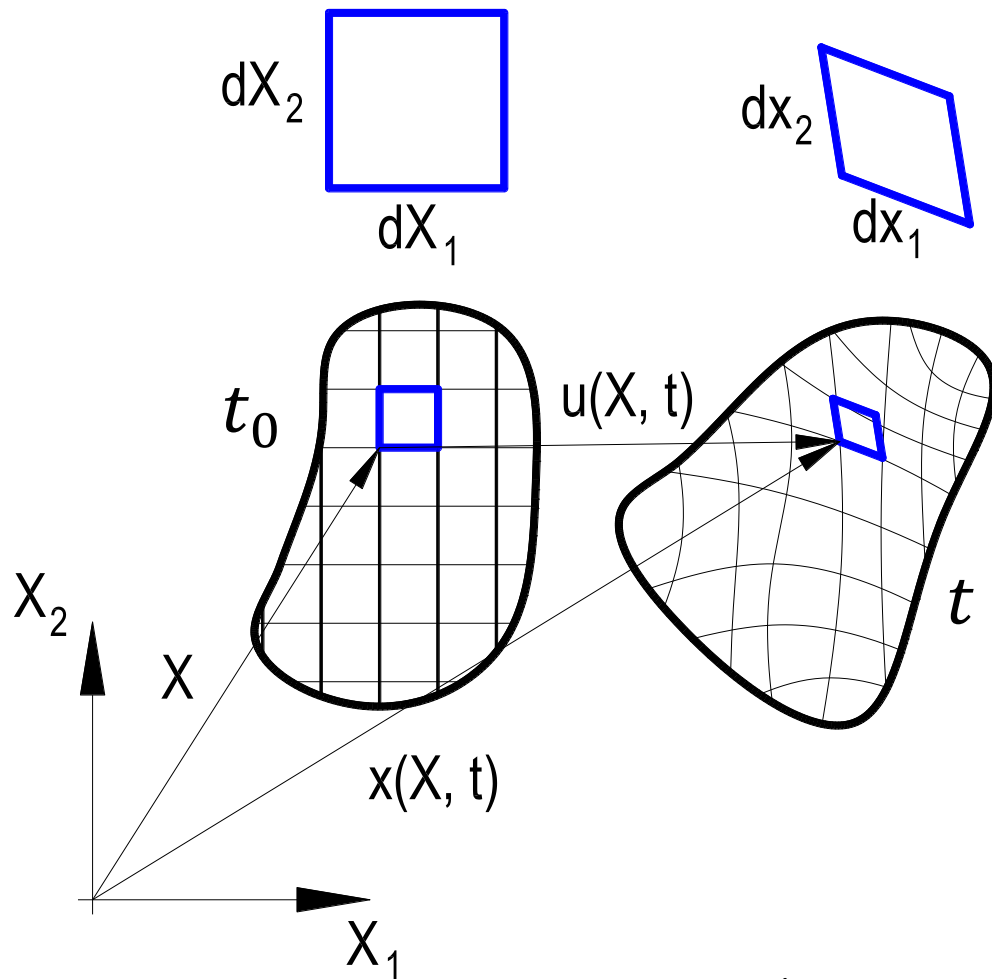
[ladanyi@uniduna.hu](mailto:ladanyi@uniduna.hu)

# Tartalom

- Bevezetés →
  - Motiváció
  - A peridinamikus anyagmodell
  - Irodalmi áttekintés
- Korábbi kutatási eredmények összefoglalása →
- A folyamatban lévő kutatás
  - Nagy alakváltozások peridinamikus leírása
  - A peridinamikus megoldás „megbízhatóságának” javítása →
- Összefoglalás és további tervek →
  - Az eddigi eredmények publikálása
  - Nagy rugalmas, képlékeny modell kidolgozása
  - Az intenzív képlékeny alakítás peridinamikus modellezése



# Az alakváltozási állapot



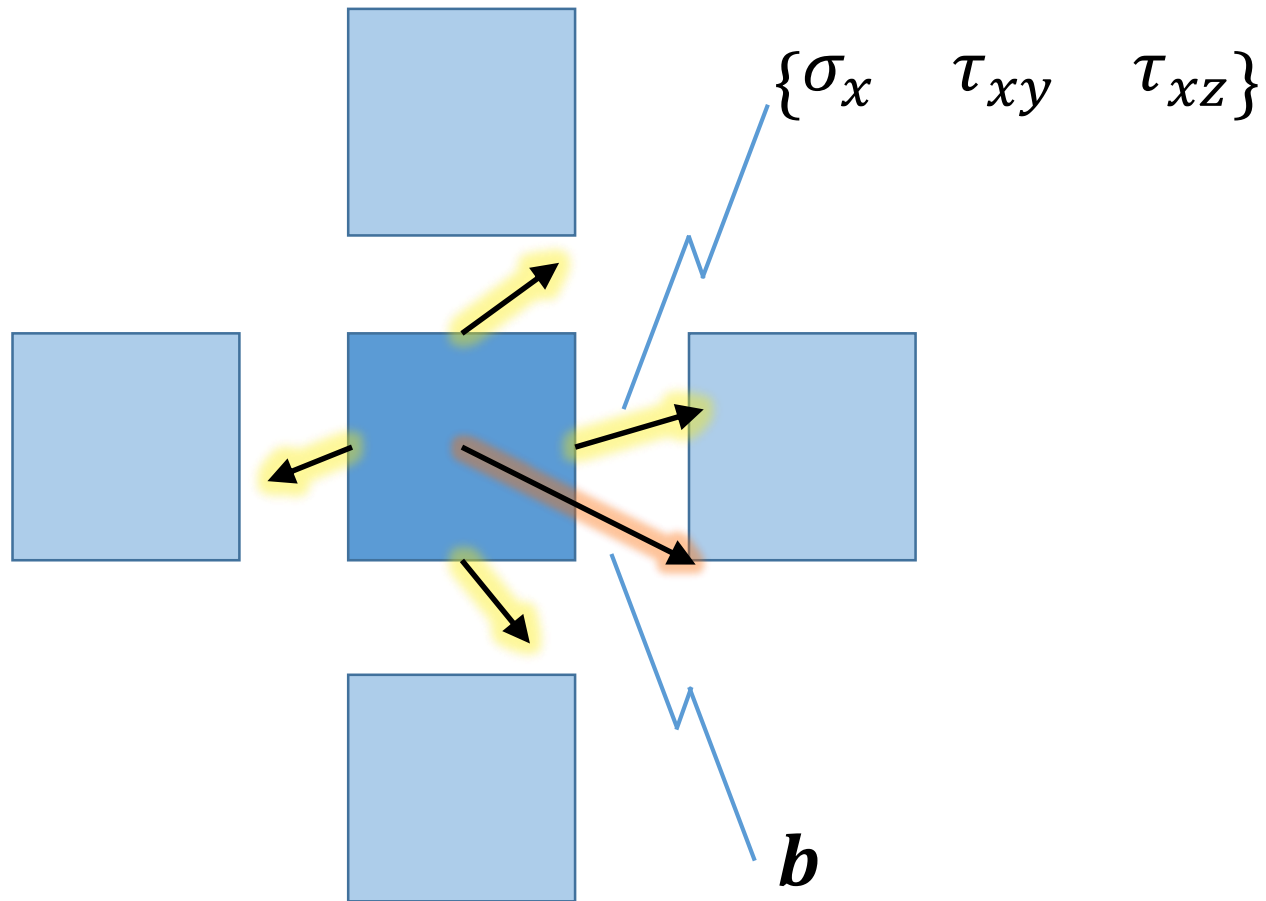
- Az  $\mathbf{X} \in V_0$  pont környezetének alakváltozását az  $\mathbf{F}$  alakváltozási gradiens reprezentálja:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

- A merevtest szerű elmozdulás nem okozhat belső erőt, feszültséget!



# A (klasszikus) lokális anyagmodell

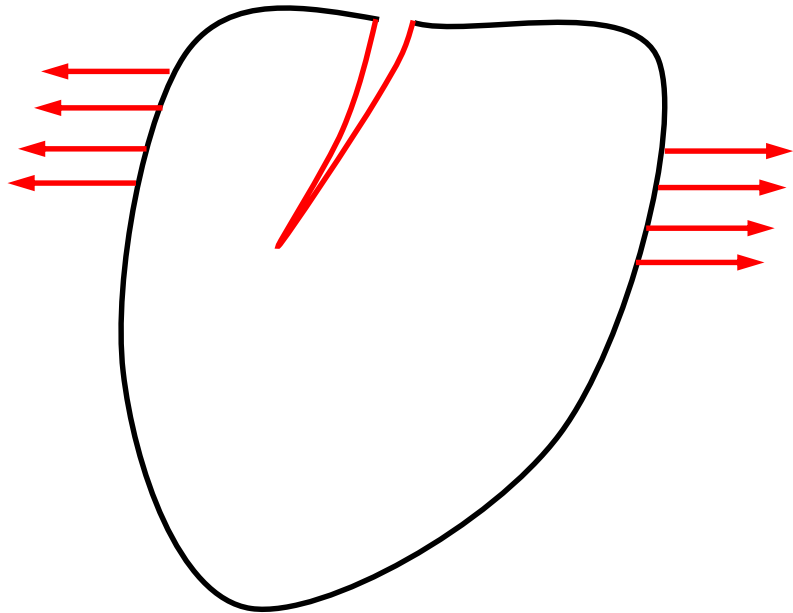


$$\rho \cdot \mathbf{a} = \text{Div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}$$

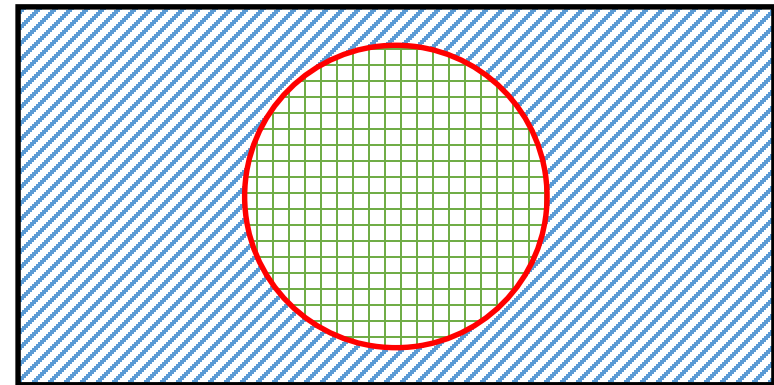
$\rho$ : tömegűrűség,  
 $\mathbf{a}$ : gyorsulás,  
 $\boldsymbol{\sigma}$ : Cauchy-féle feszültségi tenzor,  
 $= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}, \dots)$   
 $\mathbf{b}$ : térfogati terhelés.



# A klasszikus modell hiányosságai



Repedés:  $[[\mathbf{u}]] \neq \mathbf{0}$

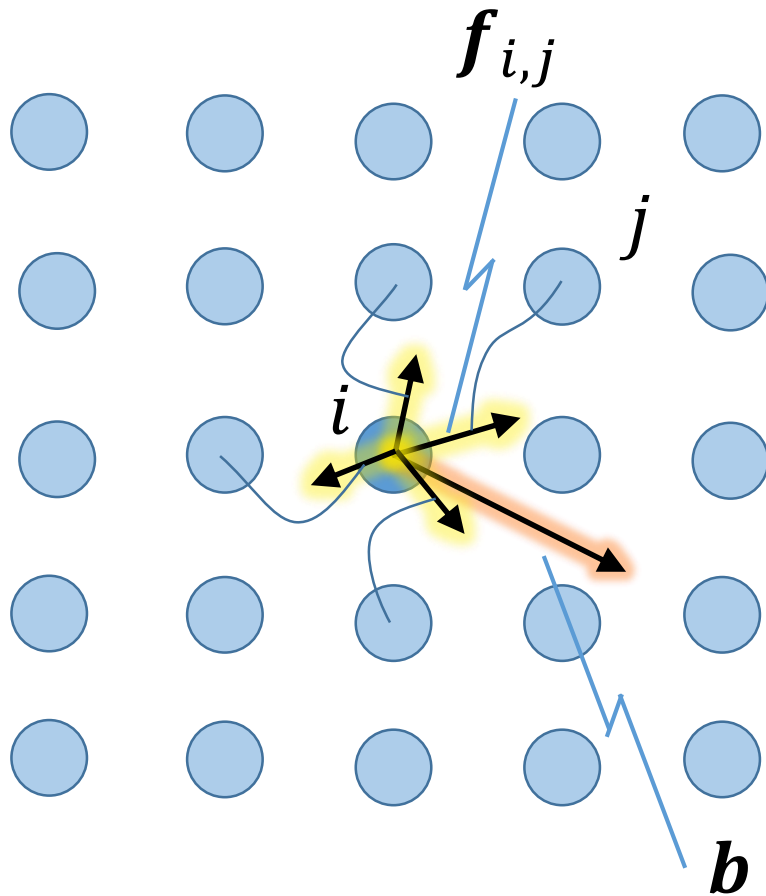


Érintkezési felület:  $[[\mathit{Grad} \mathbf{u}]] \neq \mathbf{0}$



A repedéskeletkezés, terjedés és elágazás leírása további kinetikai vagy energetikai feltételt igényel.

# A peridinamikus mozgásegyenlet<sup>[1]</sup>



$$\rho \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{NF} \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{b}$$

$\rho$ : tömegűrűség,

$\mathbf{a}$ : gyorsulás,

$\mathbf{f}_{i,j}$ : peridinamikus belső erő,

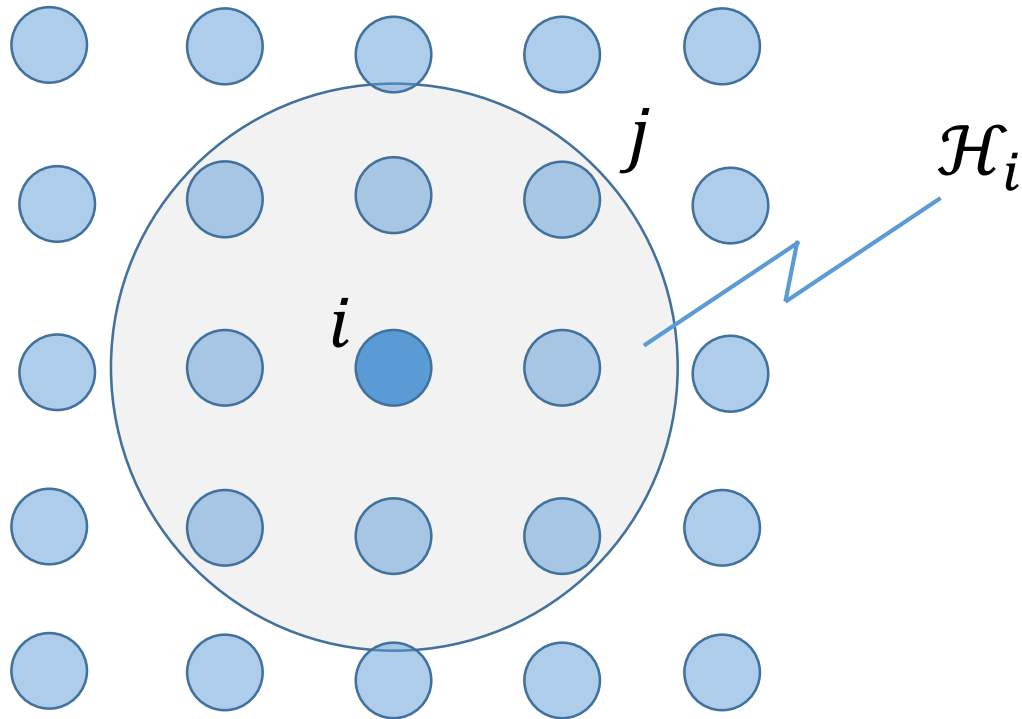
$$= \mathbf{f}[\mathbf{X}_i] \langle \mathbf{x}_{ij} \rangle$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}_i), \dots)$$

$\mathbf{b}$ : térfogati terhelés.



# A peridinamikus mozgásegyenlet<sup>[1]</sup>



$$\rho \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{NF} \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{b}$$

$\rho$ : tömegűrűség,

$\mathbf{a}$ : gyorsulás,

$\mathbf{f}_{i,j}$ : peridinamikus belső erő,

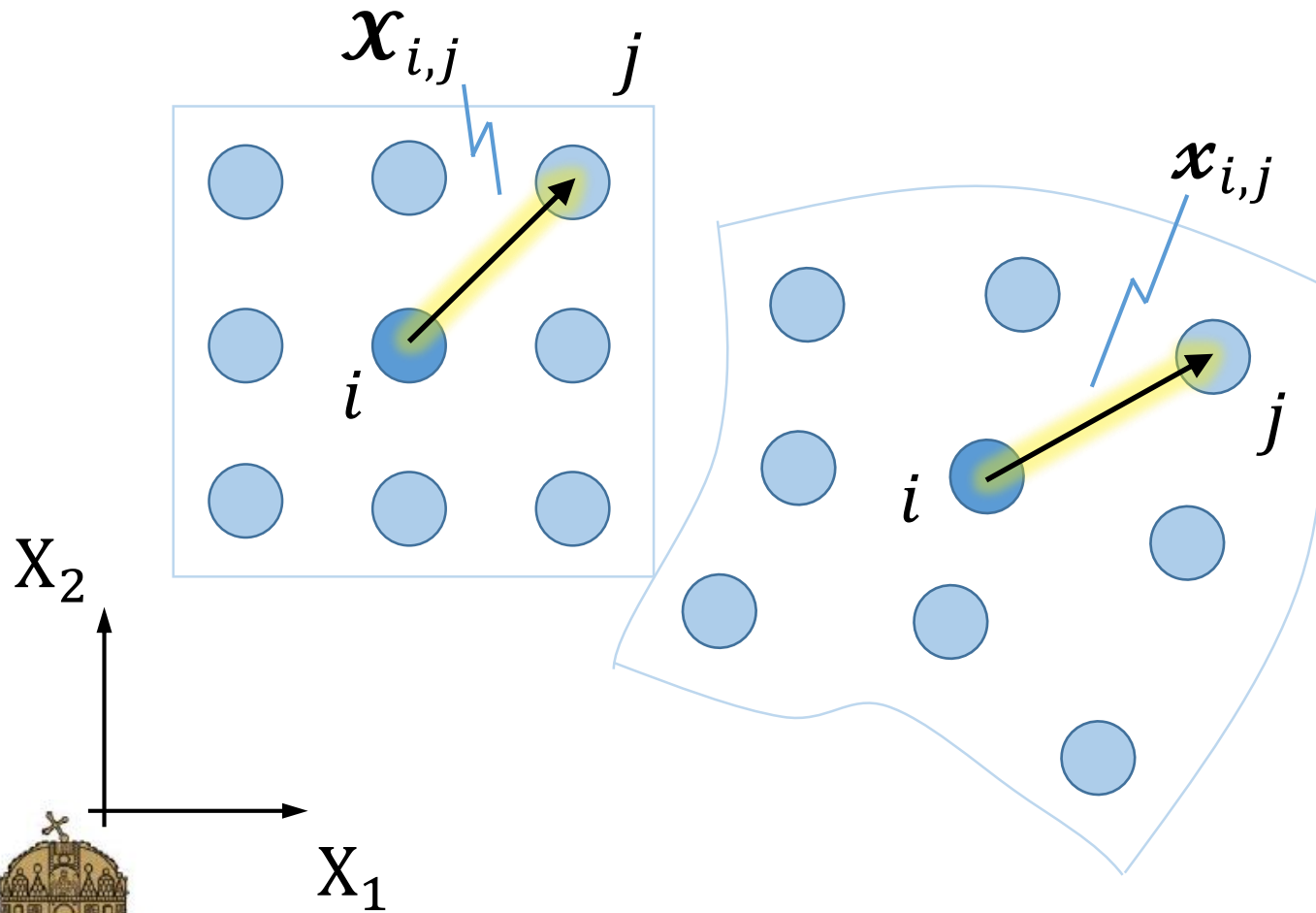
$$= \mathbf{f}[\mathbf{X}_i] \langle \mathbf{x}_{ij} \rangle$$

$$= \mathbf{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}_i), \dots)$$

$\mathbf{b}$ : térfogati terhelés.



# A peridinamikus alakváltozási gradiens<sup>[1]</sup>



- Az  $F$  alakváltozási gradiens:

$$F(\mathbf{X}_i) \cong \mathbf{K}^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{NF} \omega_{i,j} \cdot \mathbf{x}_{i,j} \otimes \mathbf{x}_{i,j}$$

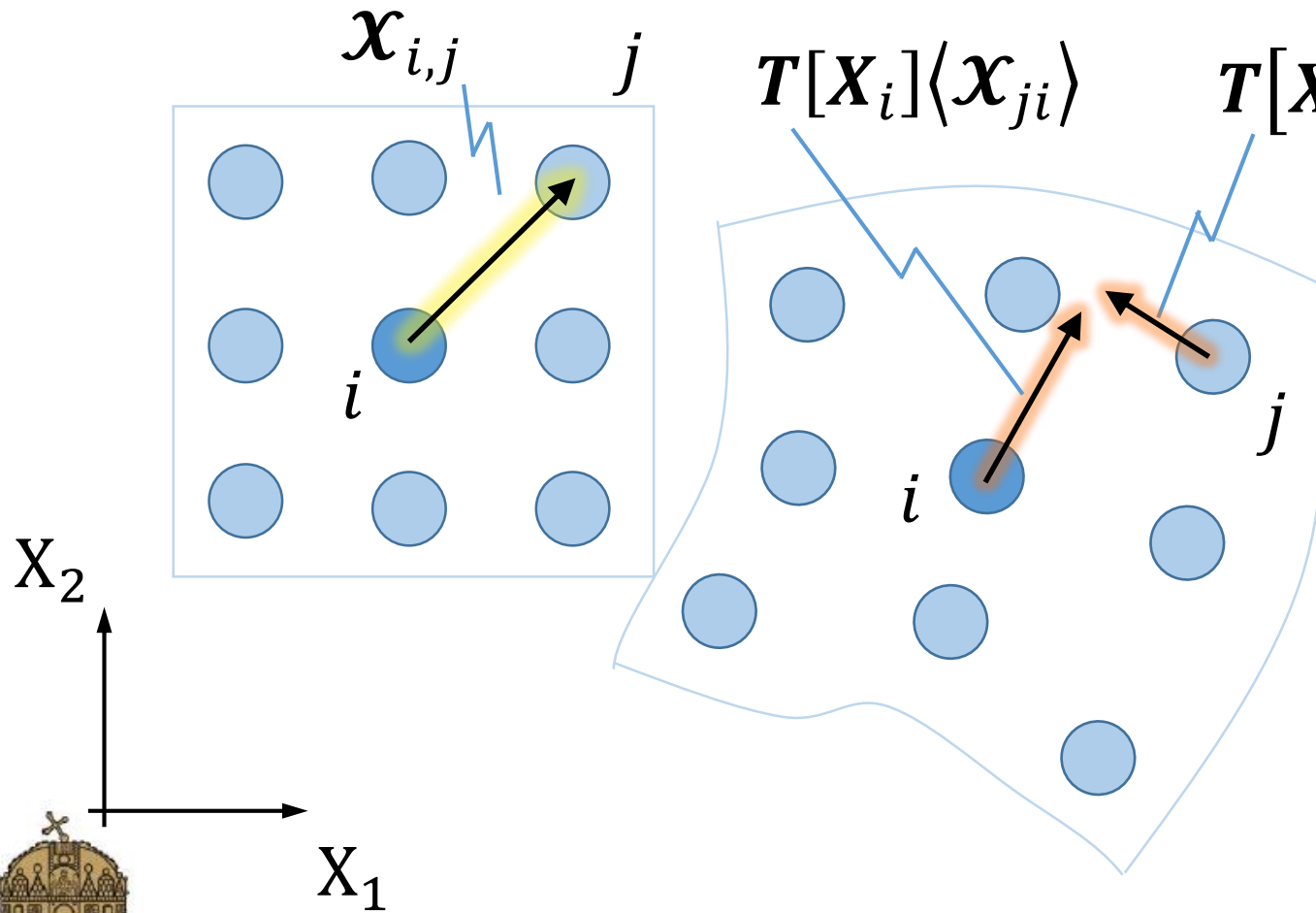
ahol  $\mathbf{K}$  az alaktenzor:

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{NF} \omega_{i,j} \cdot \mathbf{x}_{i,j} \otimes \mathbf{x}_{i,j}$$





# A peridinamikus erő-állapot<sup>[6]</sup>



$$\rho \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{NF} \mathbf{f}_{i,j} + \mathbf{b}$$

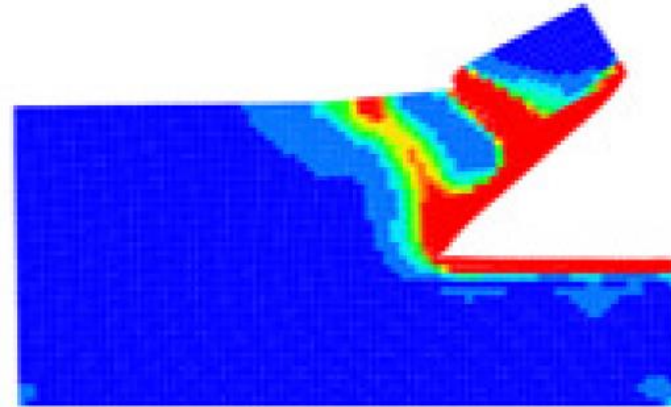
$$\mathbf{f}_{i,j} = T[\mathbf{X}_j]\langle \mathbf{x}_{ij} \rangle - T[\mathbf{X}_i]\langle \mathbf{x}_{ji} \rangle$$

$$T[\mathbf{X}_i]\langle \mathbf{x}_{ij} \rangle = \omega_{i,j} \cdot \sigma(F(\mathbf{X}_i)) \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{ij}$$

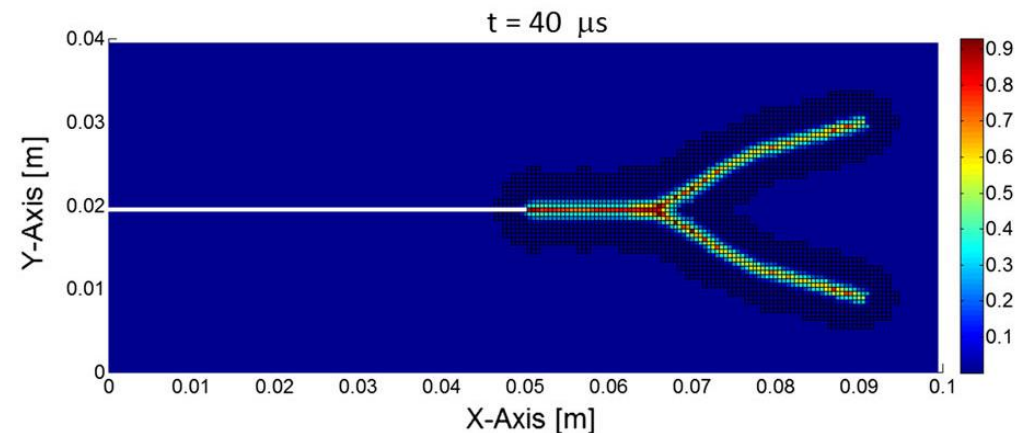


# A peridinamikus modell alkalmazásai<sup>[2, 3]</sup>

- *Rugalmas alakváltozás,*
- *Képlékeny alakváltozás,*
- *Viszkózus alakváltozás,*
- *Nanohálózat,*
- *Rideg törés,*
- *Termomechanika,*
- *Stb.*

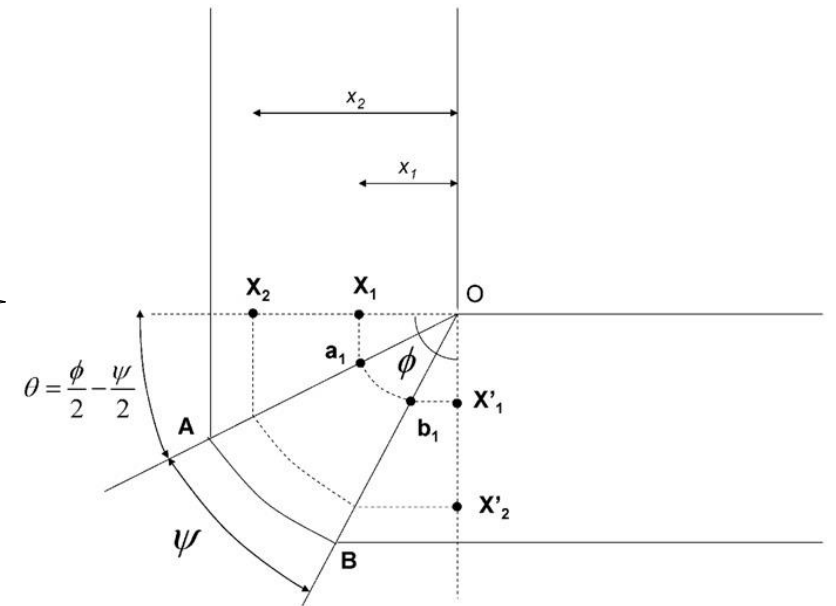
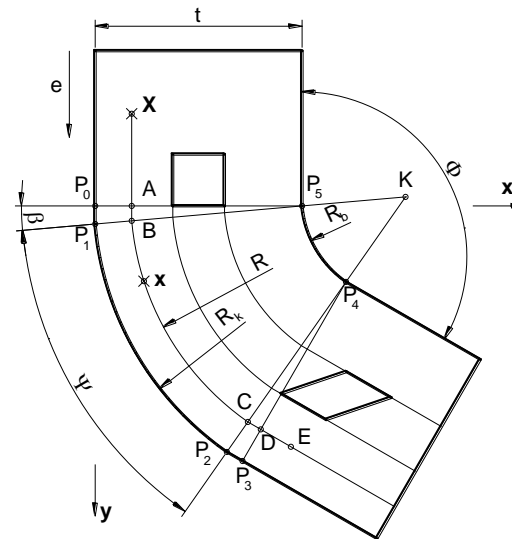


C.T. Wu, B. Ren, A stabilized non-ordinary state-based peridynamics for the nonlocal ductile material failure analysis in metal machining process, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2015),

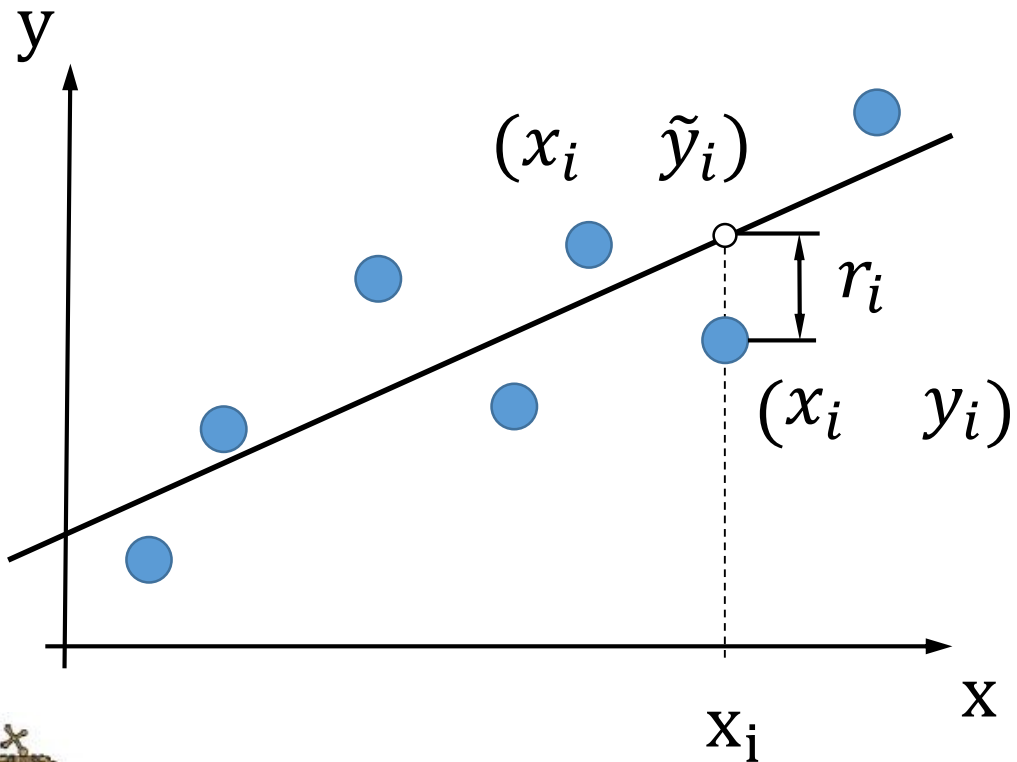


# Jelenlegi kutatási tevékenység

- Nemlineáris mozgás és egyensúlyi egyenletek megfogalmazása
- Diszkretizált egyenletek megfogalmazása
- A mozgás és egyensúlyi egyenletek megoldójának kidolgozása
- Esettanulmányok vizsgálata
  - Tiszta húzás,
  - Hárompontos hajlítás,
  - Intenzív képlékenyalakítási problémák



# A peridinamikus modell és a legkisebb hibanégyzet közelítés kapcsolata<sup>[4, 5]</sup>



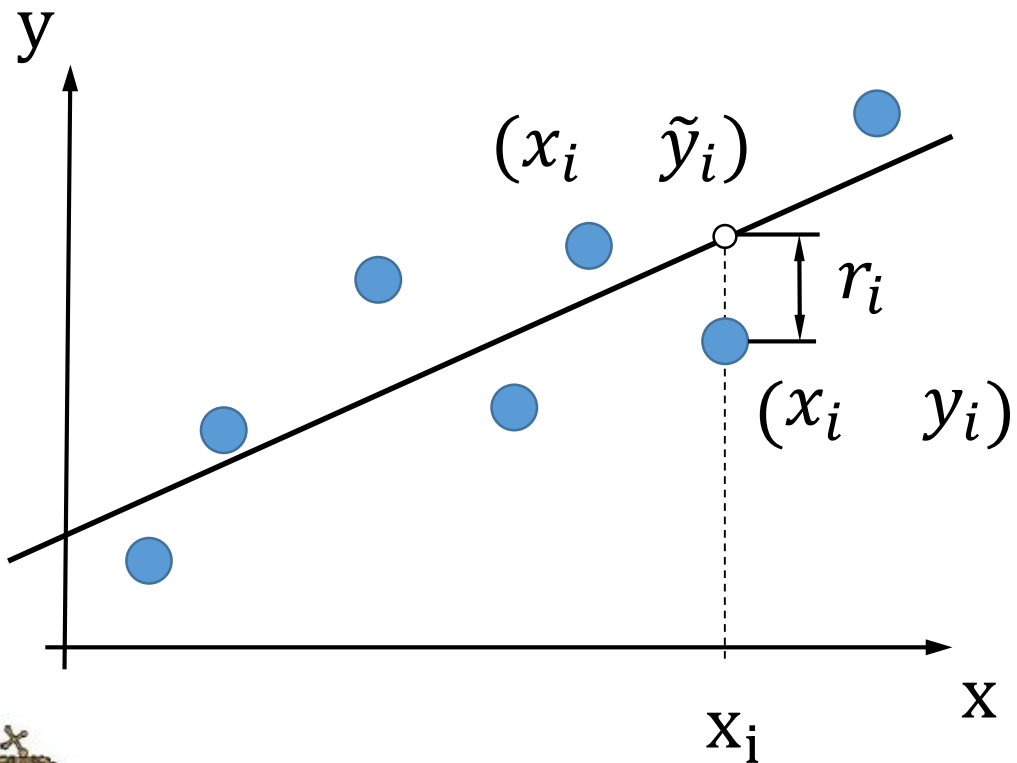
- Az egyenes egyenlete:  
$$\tilde{y}(x) = a_0 + a_1 \cdot x = y(x)$$
- NP darab pontra felírva:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_{NP} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{NP} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$$



# A peridinamikus modell és a legkisebb hibanégyzet közelítés kapcsolata<sup>[4, 5]</sup>



- A kapott túlhatározott egyenletrendszer általánosított megoldása:

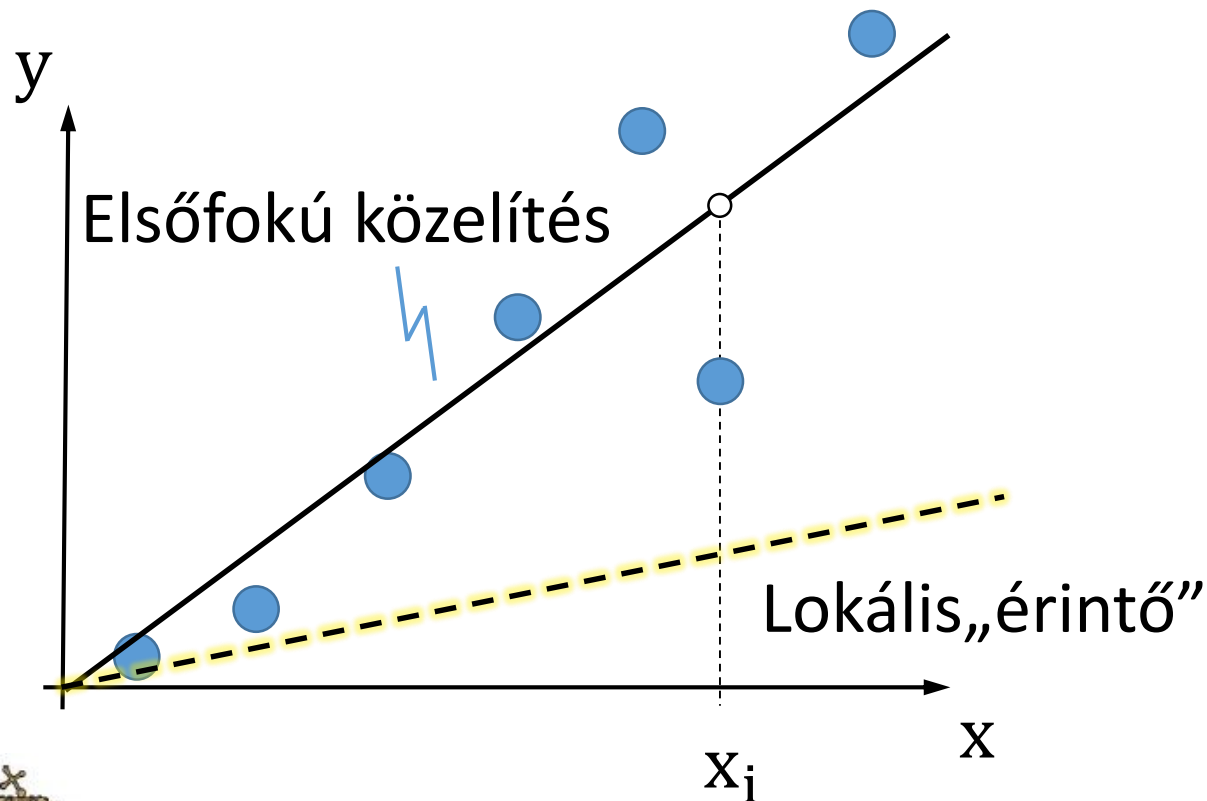
$$\mathbf{a} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}$$

- Emlékeztetőül:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{K}^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{NF} \omega_{i,j} \cdot \mathbf{x}_{i,j} \otimes \mathbf{x}_{i,j}$$



# A lineáris közelítés hiányossága



- A probléma:

- Nemlineáris függvény esetén az érintő hibás.



- Inhomogén elmozdulásmező esetén az  $F$  alakváltozási gradiens hibás.



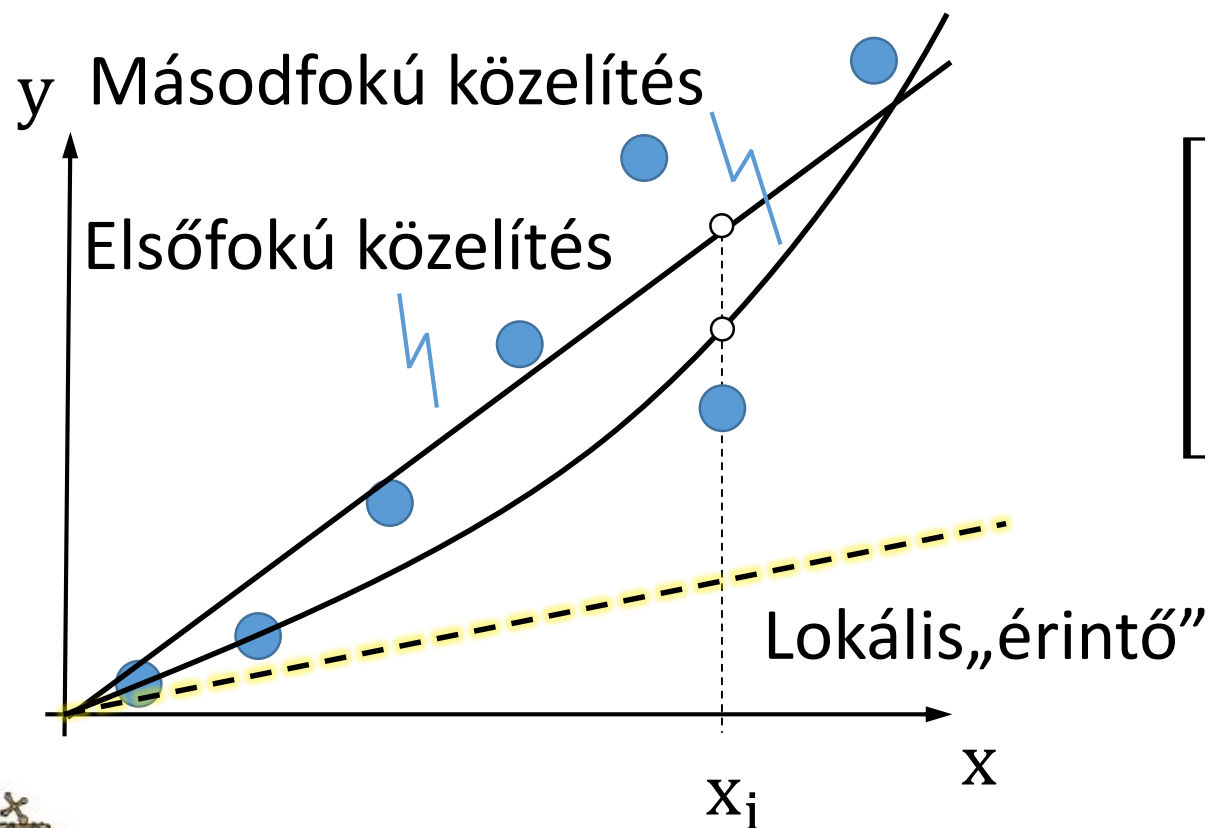
- A merevtest szerű elfordulás kiszámítása hibás eredményre vezet.



- A konvergencia sebessége csökken, a numerikus eredmény téves.



# A lineáris közelítés hiányossága



- A probléma megoldása:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdot & x_1^k \\ 1 & x_2 & \cdot & x_2^k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{NP} & \cdot & x_{NP}^k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_{NP} \end{Bmatrix}$$

$$P \cdot a = y$$

$$a = (P^T \cdot P)^{-1} \cdot P \cdot y$$

- A keresett érintő:  $a_1$



# A közelítés „ára” 2- és 3 dimenzióban

## 2D közelítés

- $p_0 = \{1\}$
- $p_1 = \{1, x, y\}$
- $p_2 = \{1, x, y, x^2, x \cdot y, y^2\}$
- ...

$$\text{Dim}(p_k) = \sum_{j=1}^k k$$

## 3D közelítés

- $p_0 = \{1\}$
- $p_1 = \{1, x, y, z\}$
- $p_2 =$   
 $\{1, x, y, z, x^2, x \cdot y, y^2, y \cdot z, z^2, z \cdot x\}$
- ...

$$\text{Dim}(p_k) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^j l$$



# A közelítés „ára” 2- és 3 dimenzióban

## 2D közelítés

$$\bullet P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

• ...

$$\mathbf{a}^T = \{a_{01}, a_{02}, \underbrace{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}}_F, \dots\}$$

## 3D közelítés

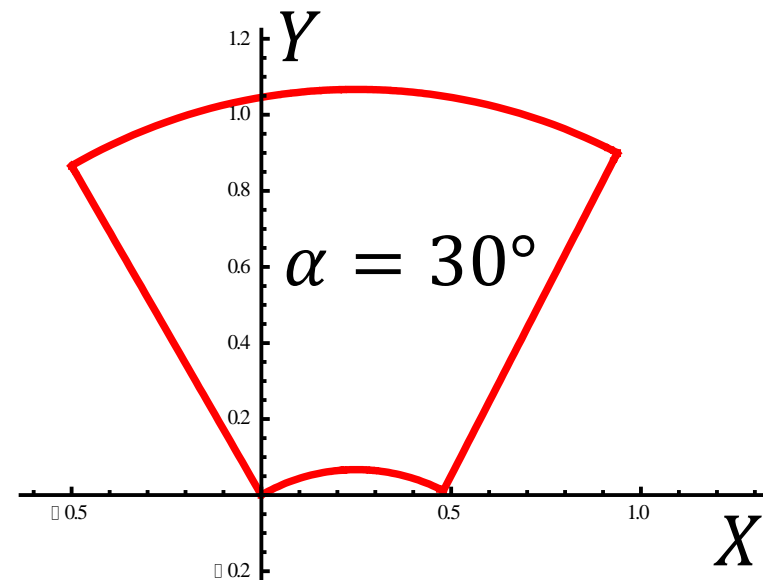
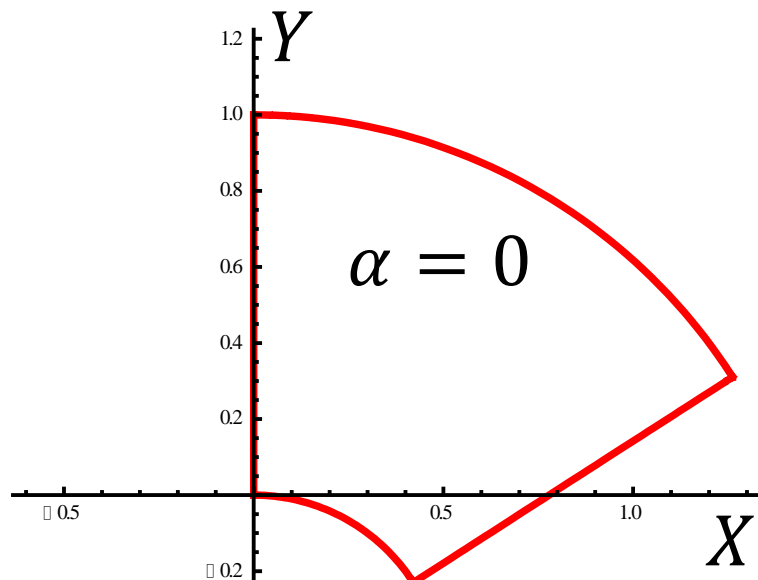
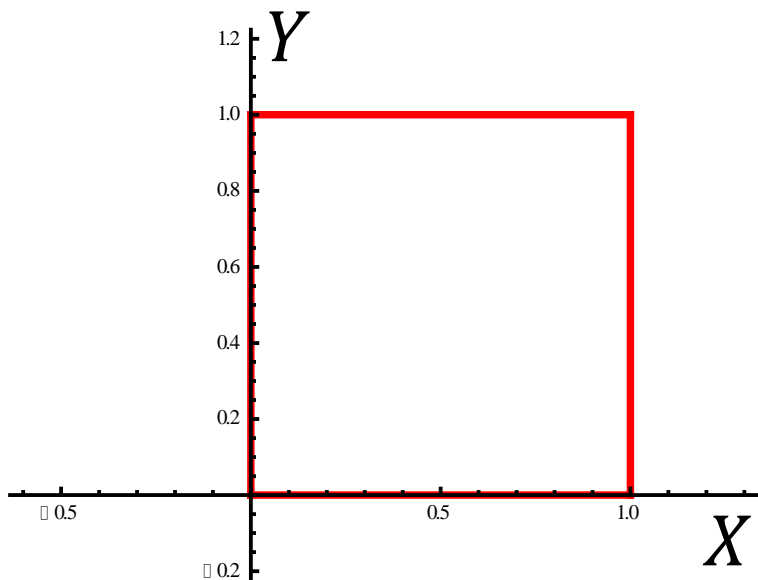
$$\bullet P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & y & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

• ...

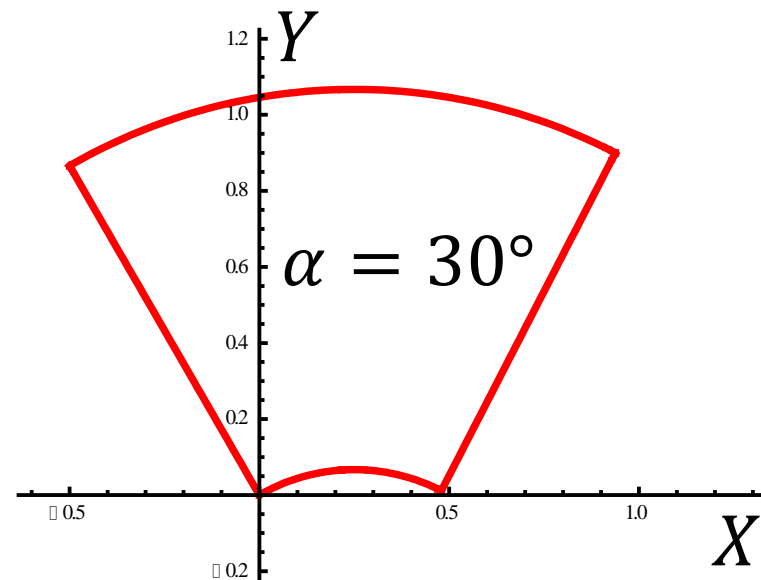
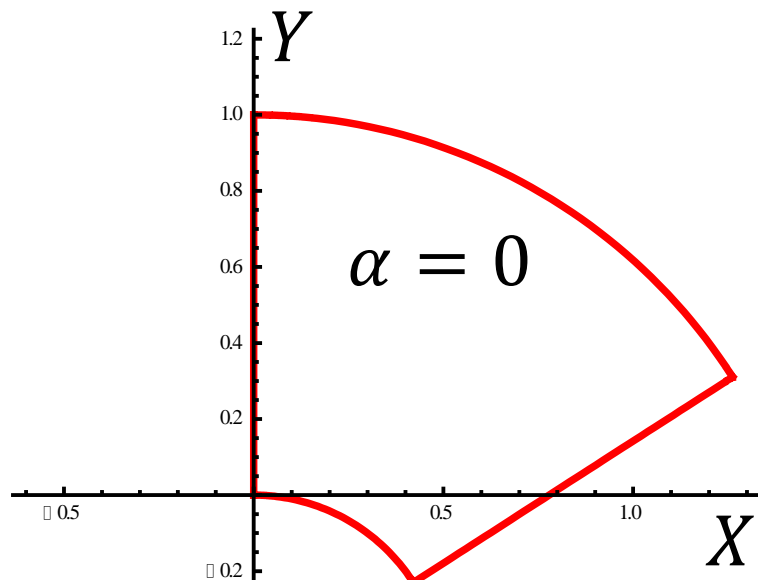
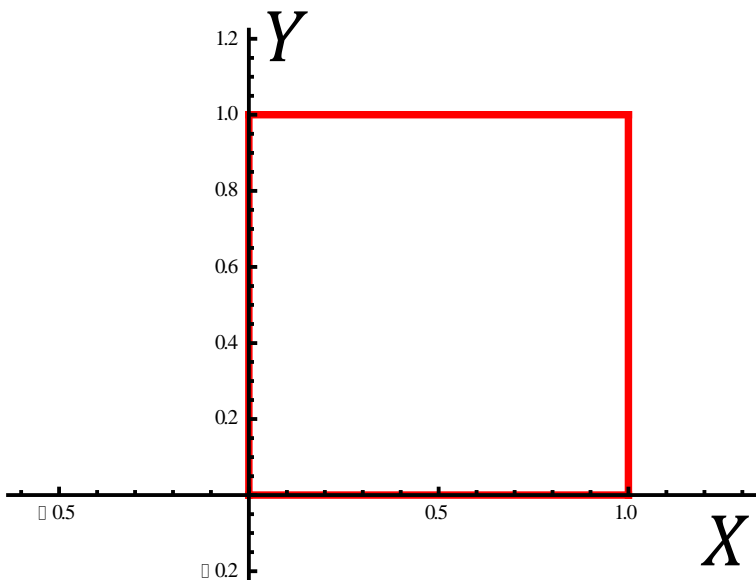
$$\mathbf{a}^T = \{a_{01}, a_{02}, a_{03}, \underbrace{a_{11}, \dots, a_{19}}_F, \dots\}$$

# Példa: „hajlítás” + elfordulás



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (0.5 + Y) \cdot \sin(X) \\ (0.5 + Y) \cdot \cos(X) - 0.5 \end{Bmatrix}$$

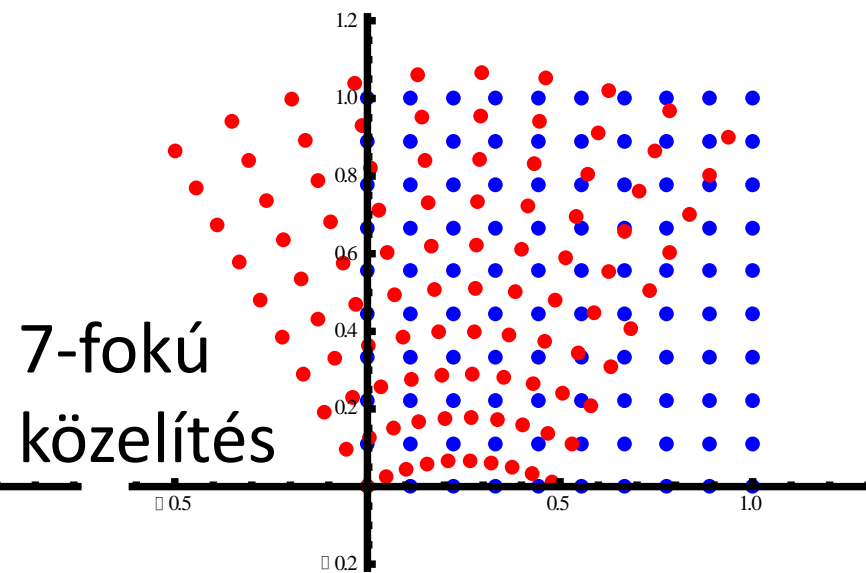
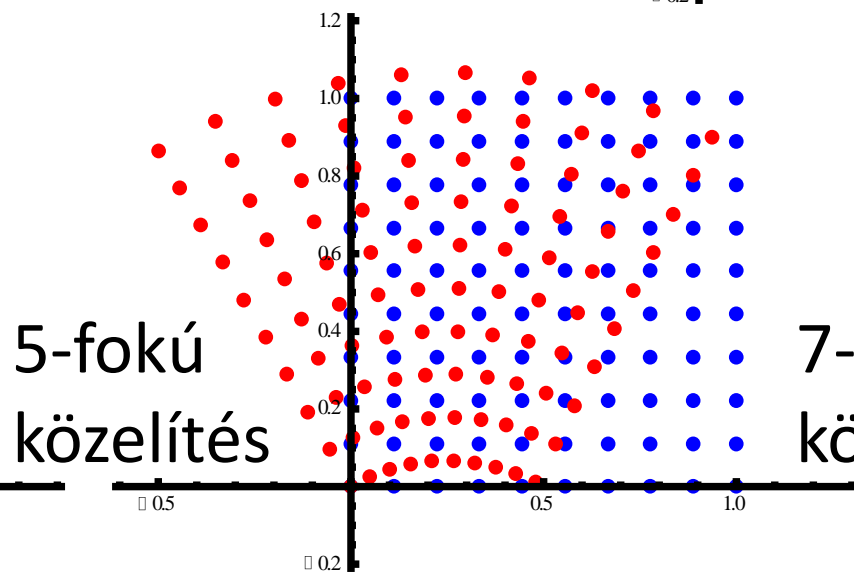
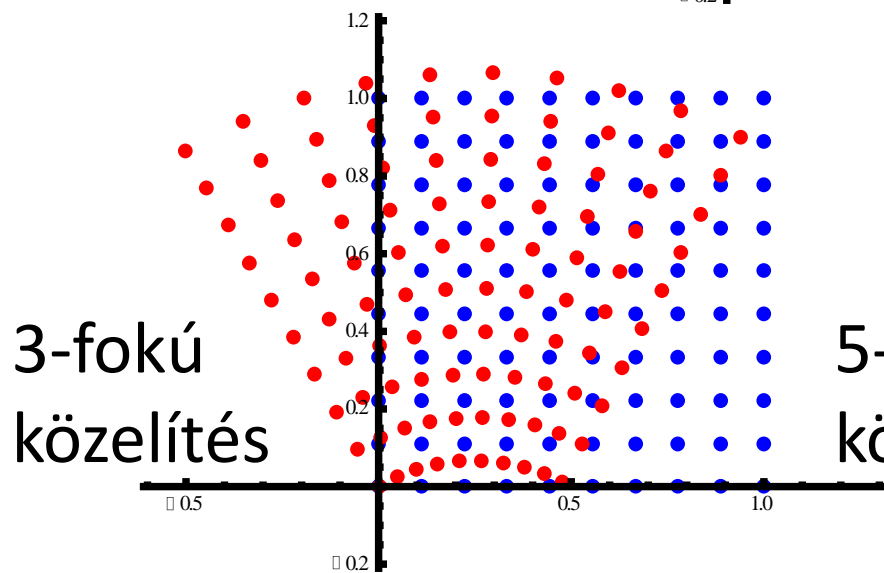
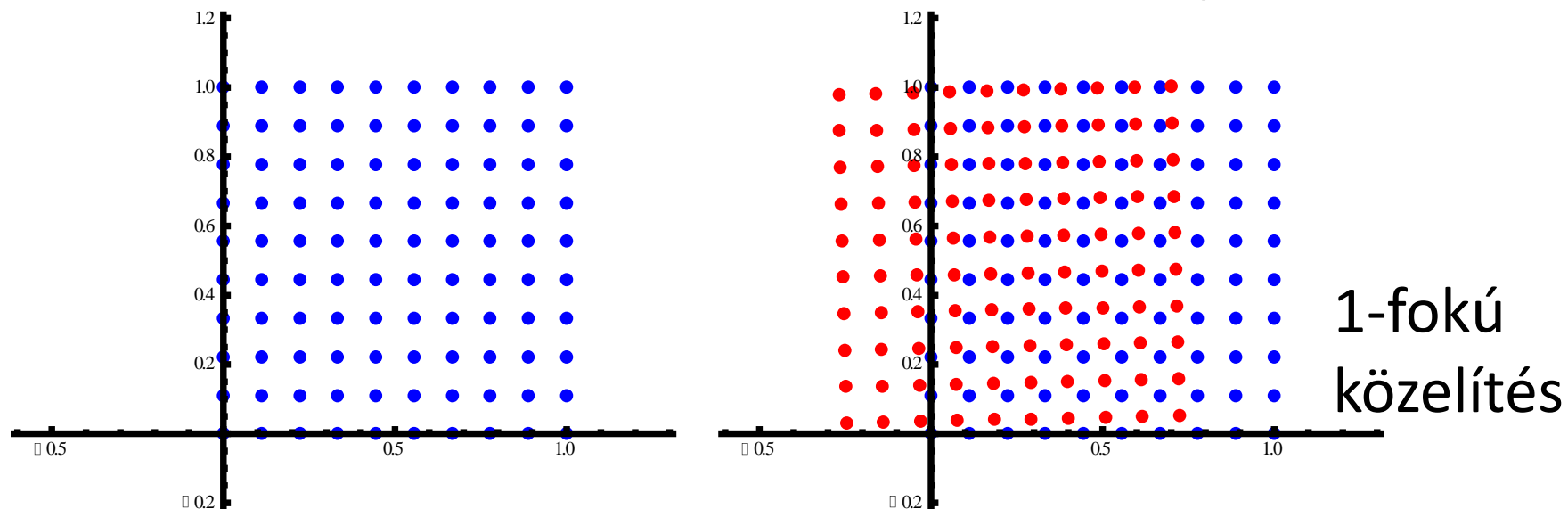
# Példa: „hajlítás” + elfordulás



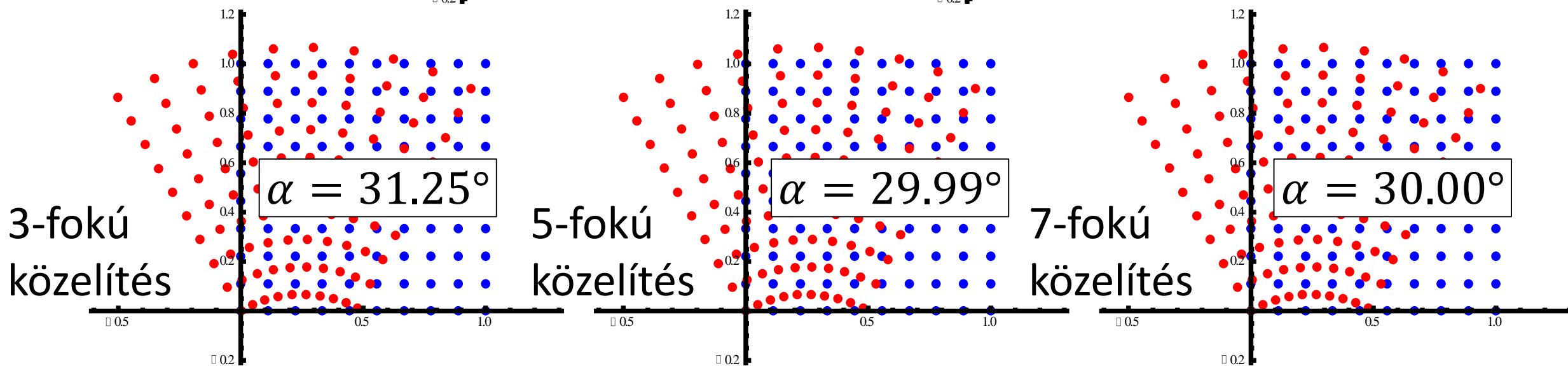
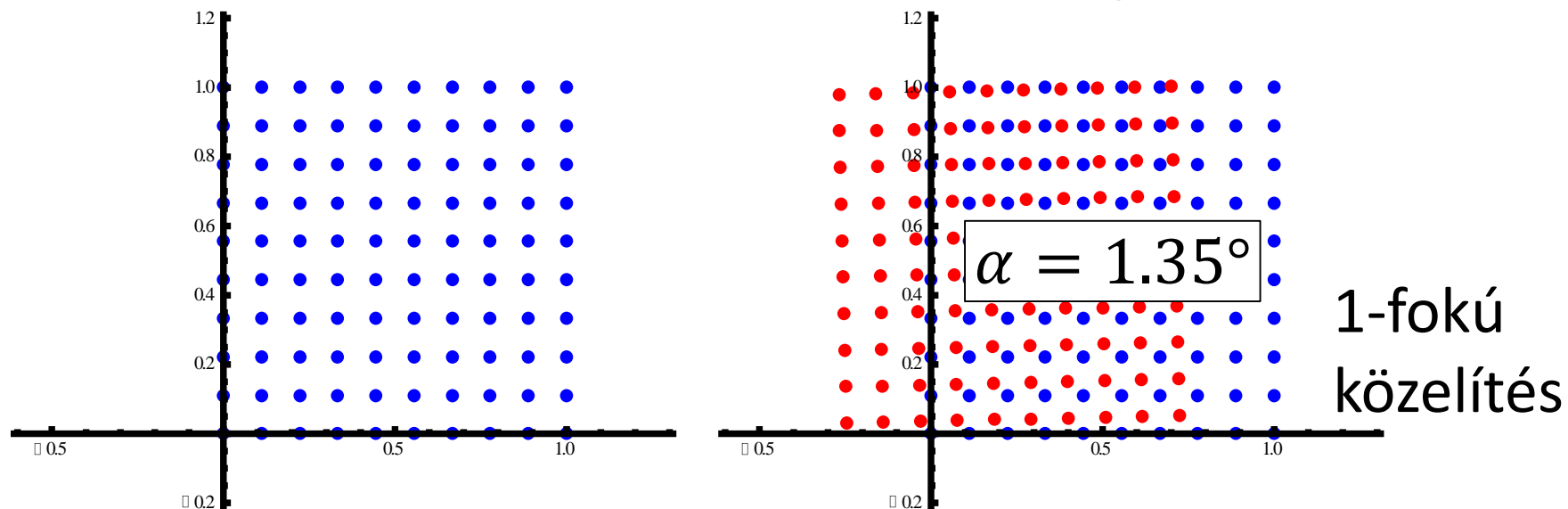
Feladatok:

1. A merevtest-szerű elfordulás ( $\alpha$ ) kiszámítása
2. A Gree-Lagrange alakváltó tenzor előállítása

# Példa: az alakváltozás rekonstrukciója



# Példa: az elfordulás rekonstrukciója



# Példa: a Green-Lagrange alakváltozási tenzor

A G-L tenzor definíciója:

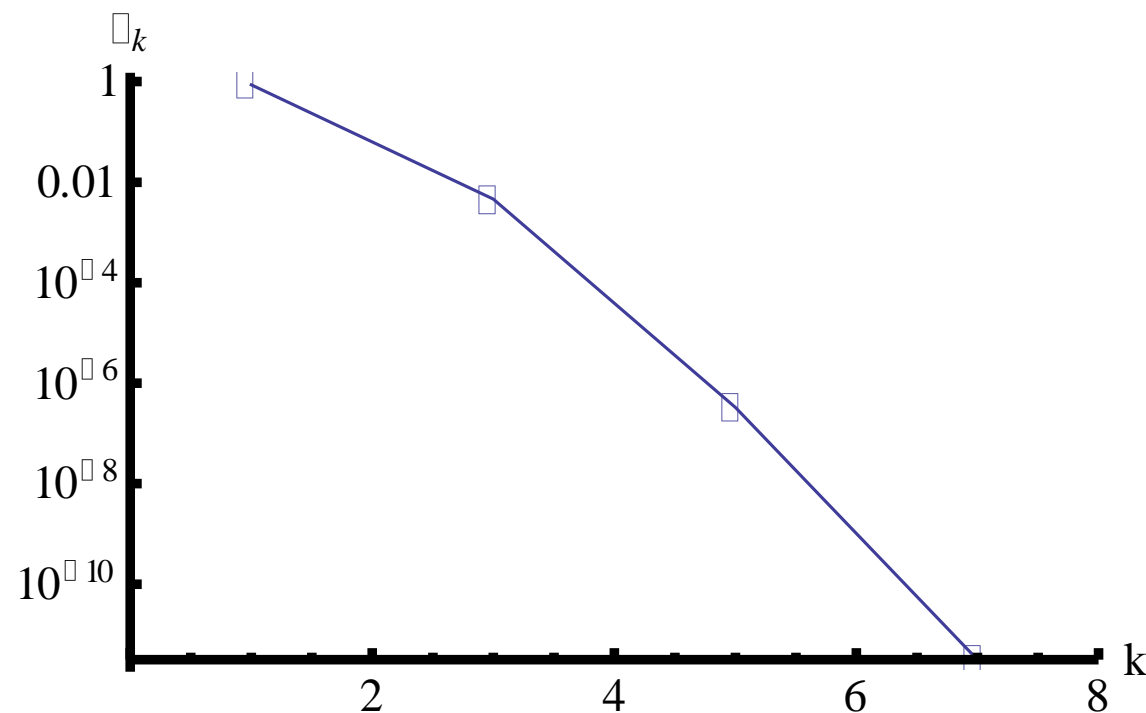
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

A 2-rendű norma definíciója:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

A k-rendű közelítés relatív hibája:

$$\delta_k = \frac{\|\mathbf{E} - \mathbf{E}_k\|_2}{\|\mathbf{E}\|_2}$$



# A szemeszter eredményei

- A szakirodalom feltárása
- A nemlineáris mozgásegyenlet megfogalmazása
- Az egyenlet megoldására alkalmas módszer (ADR-módszer) adaptálása
- Az emelt fokszámú közelítés adaptálása
- Oktatás:
  - Szilárdságtan,
  - Méréstechnika,
  - Végeelem módszer alapjai



# A tervezett tevékenységek

- Publikáció:
  - A szakirodalmi összefoglaló megjelentetése
  - Az emelt fokszámú közelítéssel kapcsolatos eredmények megjelentetése
- Kutatás:
  - Hiperelasztikus anyagmodellek adaptálása és alkalmazása
  - Képlékeny anyagmodellek adaptálása és alkalmazása
- Oktatás:
  - Statika,
  - Dinamika,
  - Végeselem módszer alapjai





Köszönöm megtisztelő  
figyelmüket!

Ladányi Gábor, PhD hallgató

[ladanyi@uniduna.hu](mailto:ladanyi@uniduna.hu)

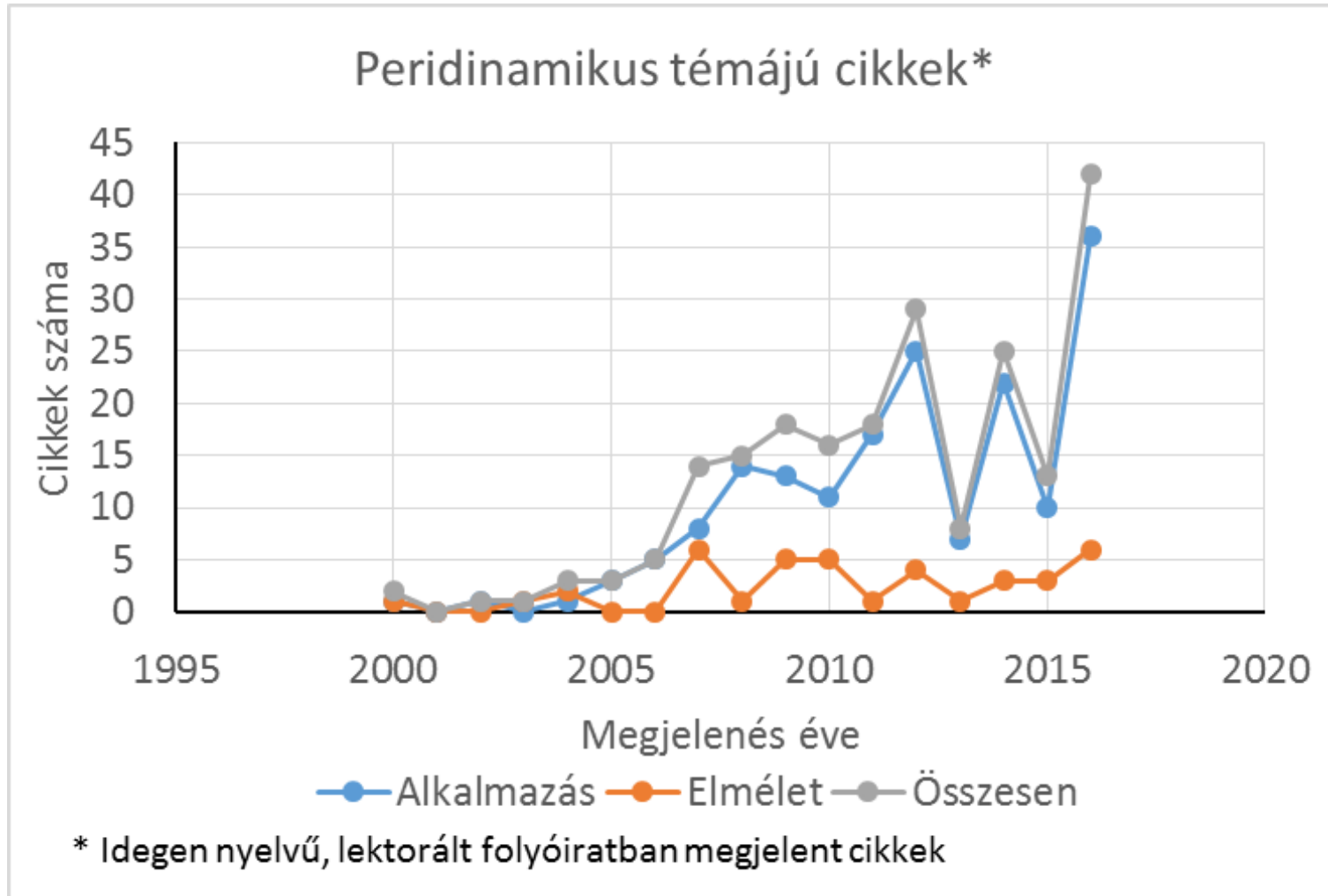
Függelék

# Felhasznált irodalom

- [1] S. A. Silling , M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari - Peridynamic States and Constitutive Modeling  
J Elasticity (2007) 88: 151–184
- [2] C.T. Wu, B. Ren, A stabilized non-ordinary state-based peridynamics for the nonlocal ductile material failure ...  
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (2015)
- [3] D. Dipasquale, M. Zaccariotto, U. Galvanetto, Crack propagation with adaptive grid refinement in 2D Peridynamics  
Int J Fract (2014) 190: 1–22
- [4] M. A. BessaJ. T. FosterT. Belytschko, Wing Kam Liu - A meshfree unification: reproducing kernel peridynamics  
Computational Mechanics (2014) 53: 1251–1264
- [5] G.C. Ganzenmüller, S. Hiermaier, M. May - On the similarity of meshless discretizations of Peridynamics and SPH  
Computers and Structures (2015) 150: 71–78
- [6] M.S. Breitenfeld, P.H. Geubelle, O. Weckner, S.A. Silling - Non-ordinary state-based peridynamic analysis of stationary crack problems, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (2014) 272: 233–250



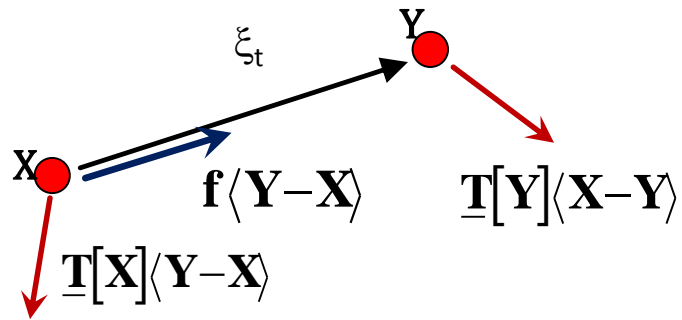
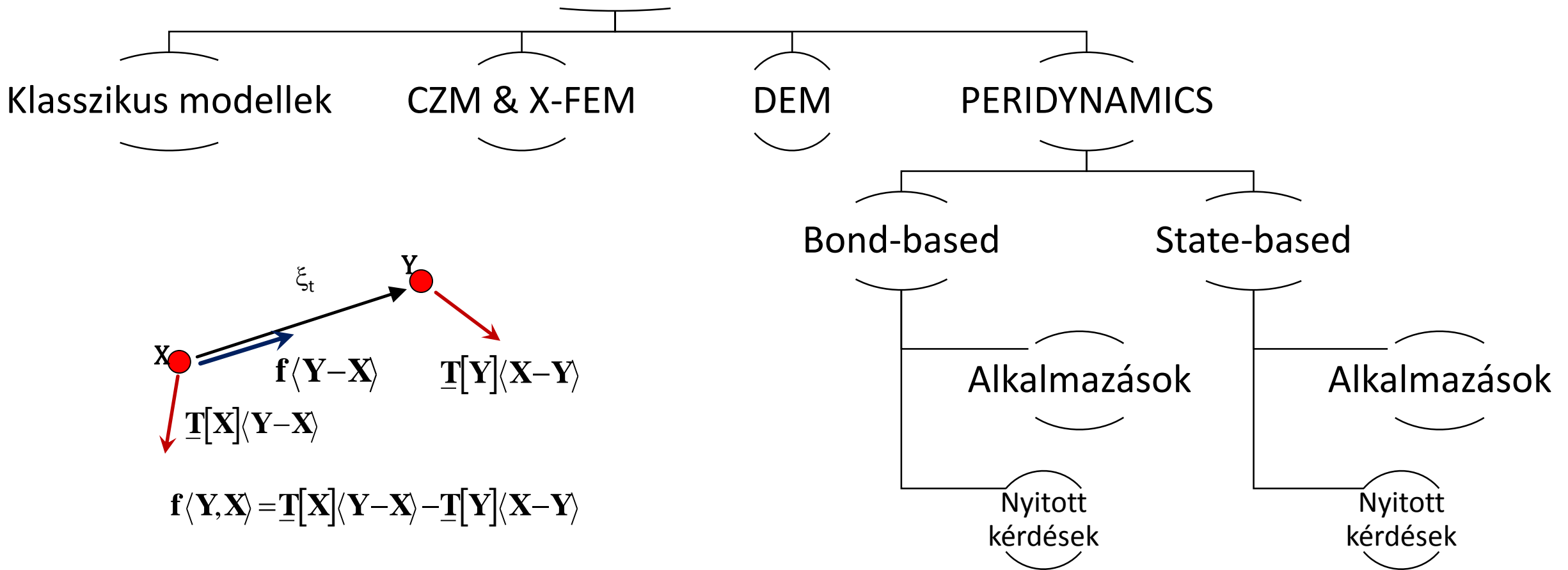
# A peridynamikus anyagmodell eddigi eredményei



TOPIC	Number of articles
Books	3
Computational techniques	3
Coupling with FEM/MESHLESS	20
Damage	6
Fatigue	7
Fracture	49
Meshless	6
Nonlocal	18
Other appl.	33
Plasticity	15
State based	17

# A peridinamikus kutatási fa

Törésmechanika - repedésterjedés



$$\mathbf{f}\langle Y, X \rangle = \underline{\mathbf{T}}[X]\langle Y-X \rangle - \underline{\mathbf{T}}[Y]\langle X-Y \rangle$$

Köszönöm megtisztelő  
figyelmüket!

Ladányi Gábor, PhD hallgató

[ladanyi@uniduna.hu](mailto:ladanyi@uniduna.hu)