Dunaújvárosi Egyetem

Nemlineáris anyagviselkedés peridinamikus modellezése

Ladányi Gábor, PhD hallgató

ladanyi@uniduna.hu

Témavezető: PhD Gonda Viktor

Kutatási beszámoló

2019.01.21.

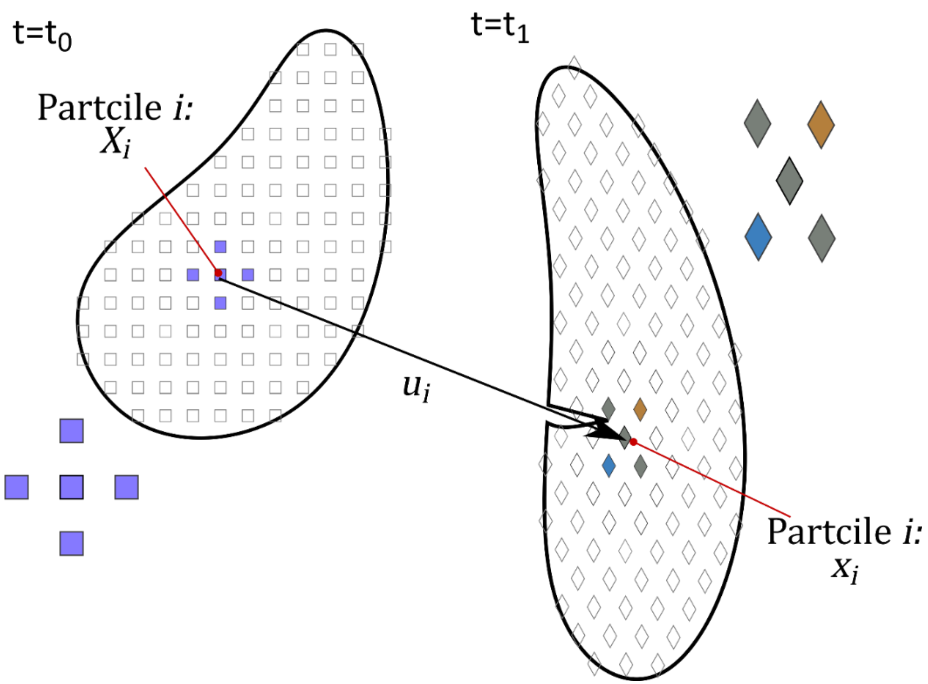
UNIVERSITAS BUDENSIS

Tartalom

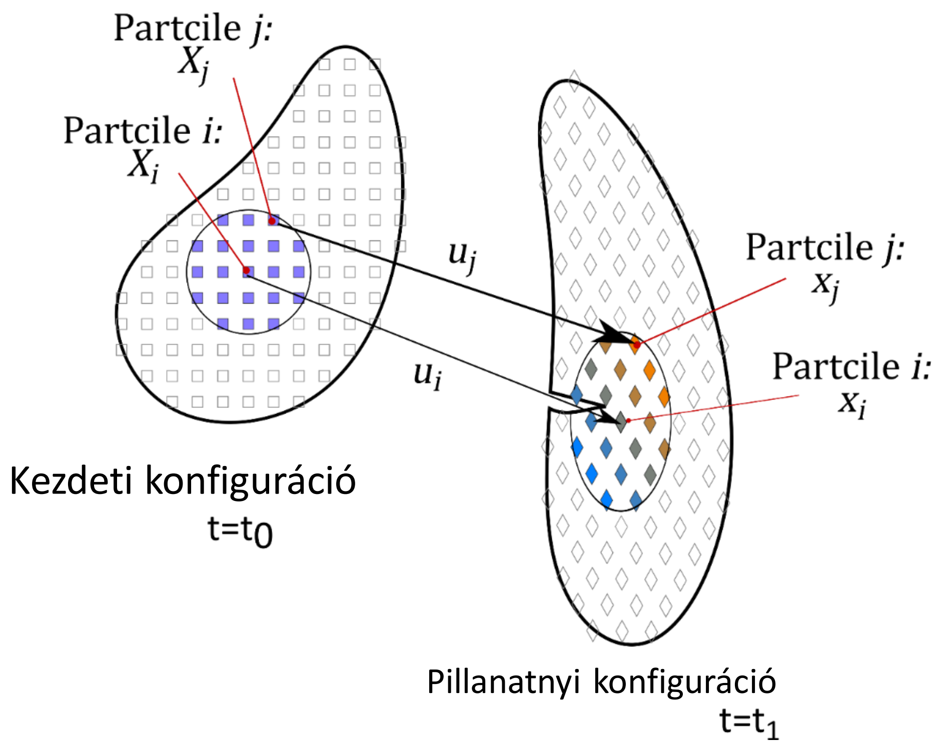
- Bevezetés
  - Motiváció
  - A peridinamikus anyagmodell
  - Irodalmi áttekintés
- Korábbi kutatási eredmények összefoglalása
- Célkitűzések
  - Nagy alakváltozások peridinamikus leírása
  - A peridinamikus megoldás „megbízhatóságának” javítása
- Eredmények és további tervek
  - Az eddigi eredmények publikálása
  - Nagy rugalmas, képlékeny modell kidolgozása
  - Az intenzív képlékeny alakítás peridinamikus modellezése

Nem közönséges állapot alapú PeriDinamikus modell

Lokális kontinuum mechanika



Peridinamikus kontinuum mechanika



[1] S. A. Silling , M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari - Peridynamic States and Constitutive Modeling, J. Elasticity (2007) 88: 151–184

Nem közönséges állapot alapú PeriDinamikus modell

A peridinamikus állapot

- Kinematika
  - A referencia pozíció állapot: $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} = \boldsymbol{X}_B - \boldsymbol{X}_A$
  - A pillanatnyi pozíció állapot: $\boldsymbol{x}_{AB} = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A$
  - Az elmozdulás állapot: $\boldsymbol{\mathcal{U}}_{AB} = \boldsymbol{u}_B - \boldsymbol{u}_A$
  - Az alaktenzor: $\boldsymbol{K}_A = \int_{\mathcal{H}_A} \omega(|\boldsymbol{\mathcal{X}}|) \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} \circ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} d\boldsymbol{X}_B$
- Dinamika
  - Az erőállapot: $\boldsymbol{T}_{AB} = \boldsymbol{T}_{AB}(\boldsymbol{x}_{AB}, t)$
  - Nem közönséges állapot alapú PD esetén:

$$\boldsymbol{T}_{AB} = \omega(|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB}|) \cdot \boldsymbol{\sigma}_A \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} \cdot \boldsymbol{K}_A^{-1}$$

Nem közönséges állapot alapú PeriDinamikus modell

Lokális modell

- Geometriai egyenlet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \circ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \circ \nabla)$$

- Mozgásegyenlet:

$$\varrho \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{b}$$

- Anyagegyenlet (Hooke’s law):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

- Peremfeltételek:
  - Elmozdulások:

    $$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}, if\ X \in \Gamma_u$$

  - Felületi terhelés:

    $$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}}, if\ X \in \Gamma_t$$

Peridinamikus modell

- Geometriai egyenlet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\mathcal{H}_A} \omega(|\boldsymbol{\mathcal{X}}|) \cdot (\boldsymbol{\mathcal{X}} \circ \boldsymbol{\mathcal{U}} + \boldsymbol{\mathcal{U}} \circ \boldsymbol{\mathcal{X}}) d\boldsymbol{X}_B \cdot \boldsymbol{K}^{-1}$$

- Mozgásegyenlet:

$$\varrho \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}_A = \int_{\mathcal{H}_i} (\boldsymbol{T}_{BA} - \boldsymbol{T}_{AB}) d\boldsymbol{X}_B + \boldsymbol{b}_A$$

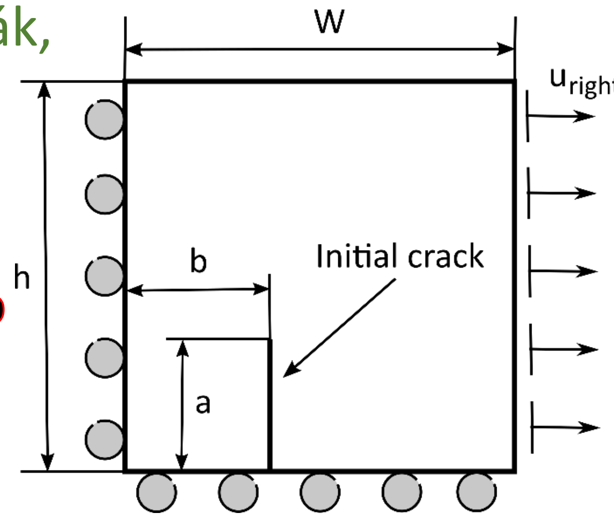
- Anyagegyenlet (Hooke’s law):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

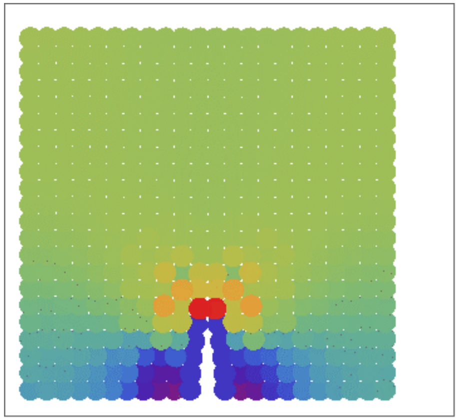
- Peremfeltételek:
  - A peremtartományon előírva.

Eredmények és nyitott kérdések

- Fizikai problémák leírása:
  - Kis/nagy elmozdulások, kis alakváltozások, linárisan rugalmas anyag, térfogati-, lemez- és rúdmodellek,
  - Kis alakváltozású rugalmas-képlékeny problémák,
  - Rideg,szívós és fáradt törés,
  - Hőterjedés,
  - Csatolt-tér problémák,
  - Nagy elmozdulásokkal és alakváltozásokkal járó problémák,
  - Más erősen nemlináris problémák.



- Megoldási módszerek:
  - A peridinamikus model megoldása hagyományos eljárásokkal (FEM, MESHLESS),
  - Párhuzamos számítási módszerek,
  - Explicit megoldók alkalmazása,
  - Implicit megoldók kis számú alkalmazása.

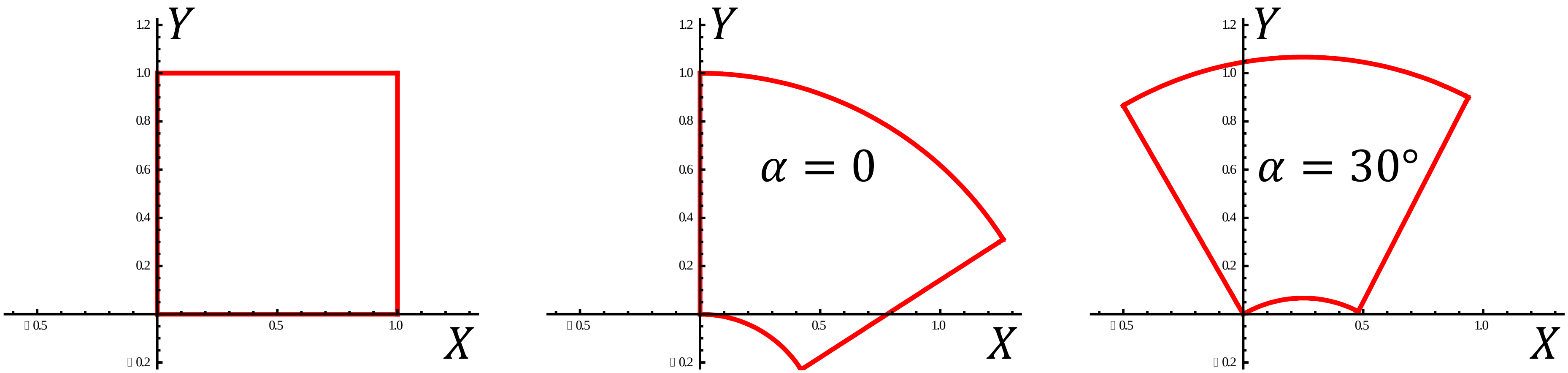


Motiváció

- A növekményes megoldók hatékonyságáról:
  - …the correct calculation of $\boldsymbol{F}_{t+\Delta t}^{i-1}$ from $\boldsymbol{U}_{t+\Delta t}^{i-1}$ is crucial. Any errors in this calculation will, in general, result in an incorrect response prediction.
  - …the correct evaluation of tangent stiffness matrix $\boldsymbol{K}_{t+\Delta t}^{i-1}$ is also important. The use of the proper tangent stiffness matrix may be necessary for convergence and, in general, will result in fewer iteration until convergence is reached.

[2] K.J. Bathe – Finite Element Analysis in Solid and Structural Mechanics, 1996, Prentice Hall, New Jersey, pp. 494

Példa: „hajlítás” + forgás



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (0.5 + Y) \cdot sin(X) \\ (0.5 + Y) \cdot cos(X) - 0.5 \end{Bmatrix}$$

<u>Célok:</u>

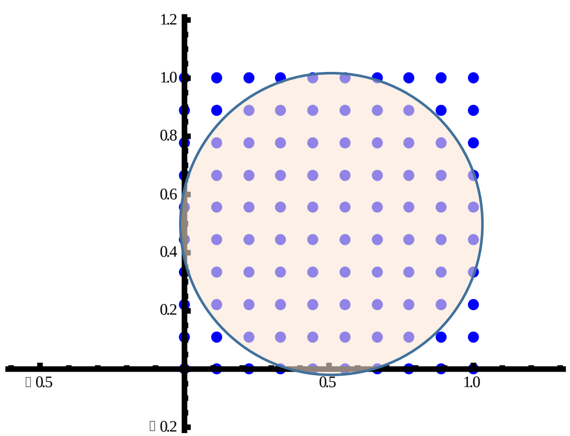
1. A merevtestszerű elfordulás (α) kiszámítása.
2. A Gree-Lagrange nyúlástenzor (E) kiszámítása.

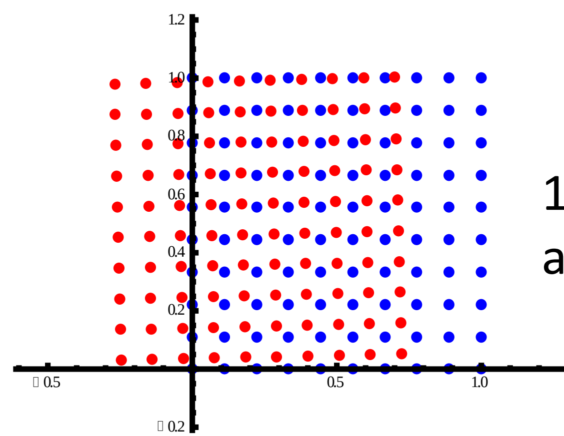
Példa: „hajlítás” + forgás

- Az alaktenzor: $\boldsymbol{K}_A = \int_{\mathcal{H}_A} \omega(|\boldsymbol{\mathcal{X}}|) \cdot \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} \circ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} d\boldsymbol{X}_B$
- Az alakváltozási gradiens: $\boldsymbol{F} = \int_{\mathcal{H}_A} \omega(|\boldsymbol{\mathcal{X}}|) \cdot \boldsymbol{x}_{AB} \circ \boldsymbol{\mathcal{X}}_{AB} d\boldsymbol{X}_B \cdot \boldsymbol{K}_A^{-1}$

$$m = \frac{\rho}{\Delta x} = 5.1$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{0} \\ \alpha = 1.35°\end{array}}$$

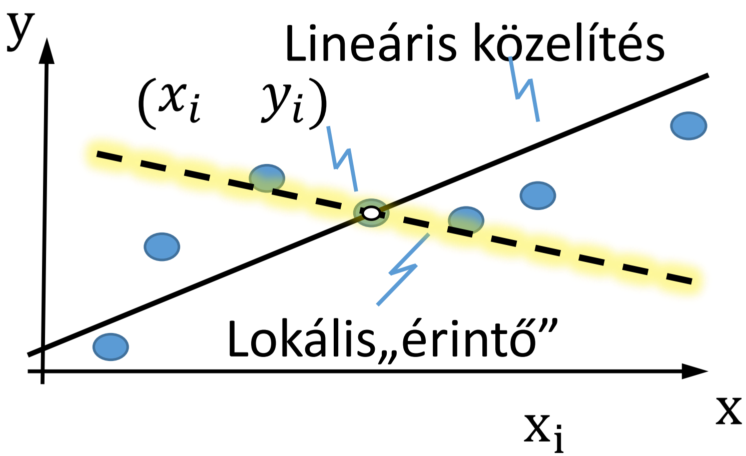


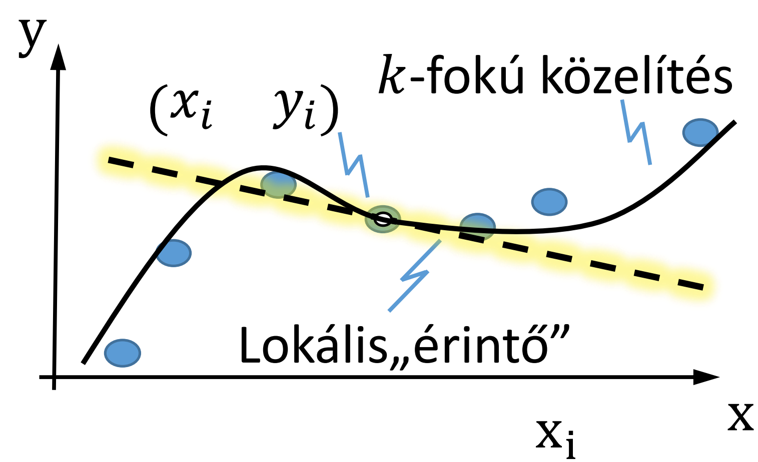


1st order approximation

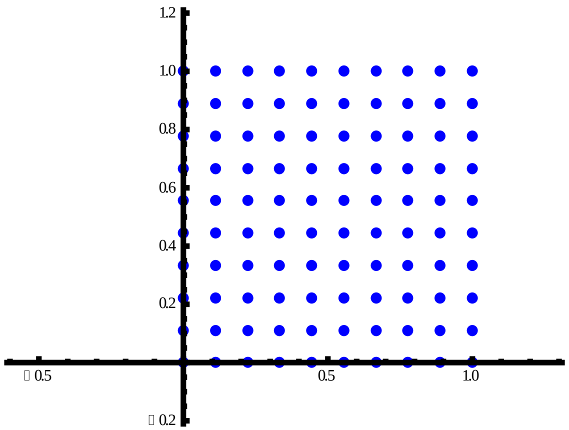
Példa: „hajlítás” + forgás

- A peridinamikus differenciál operátor (PDO) és a lineáris legkisebb hibanégyzet közelítés kapcsolata. Az emelt fokszámú PDO.

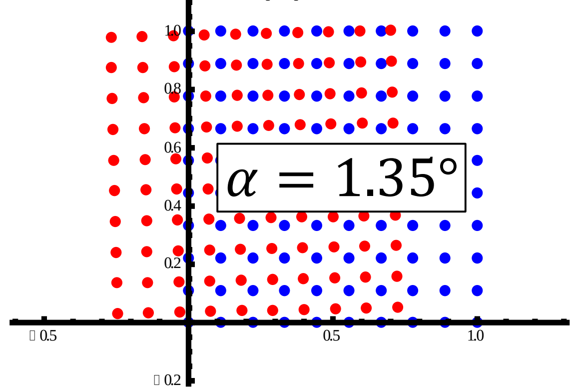


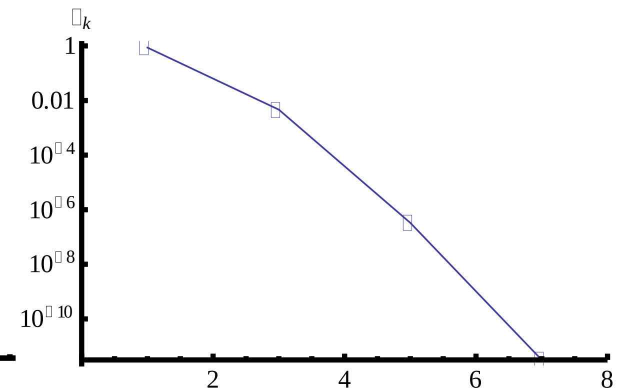


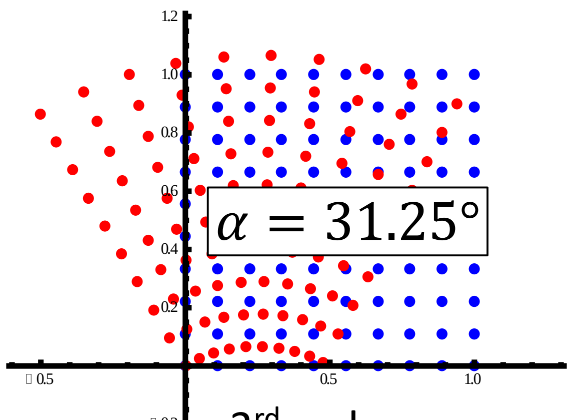
Példa: „hajlítás” + forgás



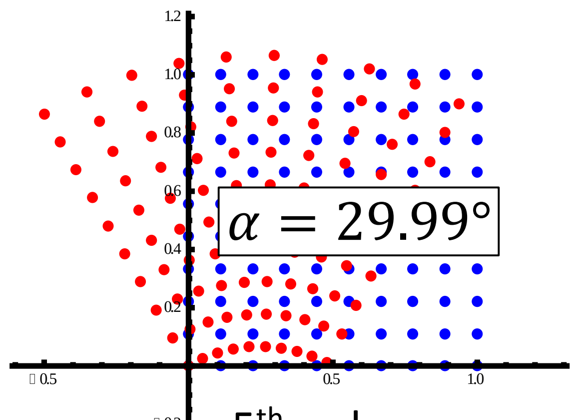
1st order approx.



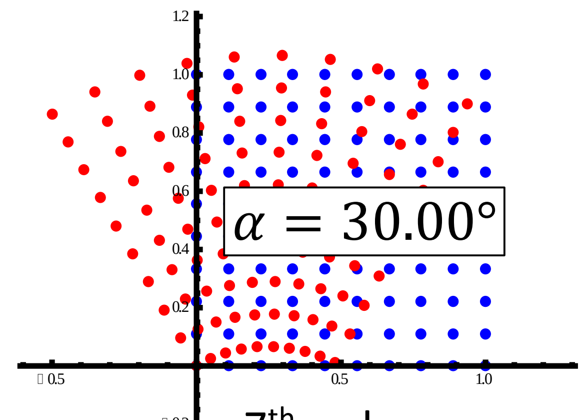




3rd order approx.



5th order approx.



7th order approx.

A peridinamikus mozgásegyenlet

- A feszültség „vektor”: $\boldsymbol{P}^T = \{P_{11} \quad P_{22} \quad P_{12}\}$

- A fesz. divergencia: $DIV\boldsymbol{P} = \begin{Bmatrix} P_{11,1} + P_{21,2} \\ P_{12,1} + P_{22,2} \end{Bmatrix}$

- A PDO alkalmazásával:

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & D_{21} & 0 & D_{12} & 0 & D_{22} & 0 & & D_{1N} & 0 & D_{2N} & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 & D_{21} & 0 & D_{12} & 0 & D_{22} & \cdots & 0 & D_{1N} & 0 & D_{2N} \end{bmatrix}$$

$$DIV\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{P}}^{A} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}} = \sum_{B=1}^{NNA} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{P}}^{AB} \cdot \big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_B) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_A)\big) \cdot \Delta V_B$$

- Mozgásegyenlet teljes Lagrange leírás szerint* :

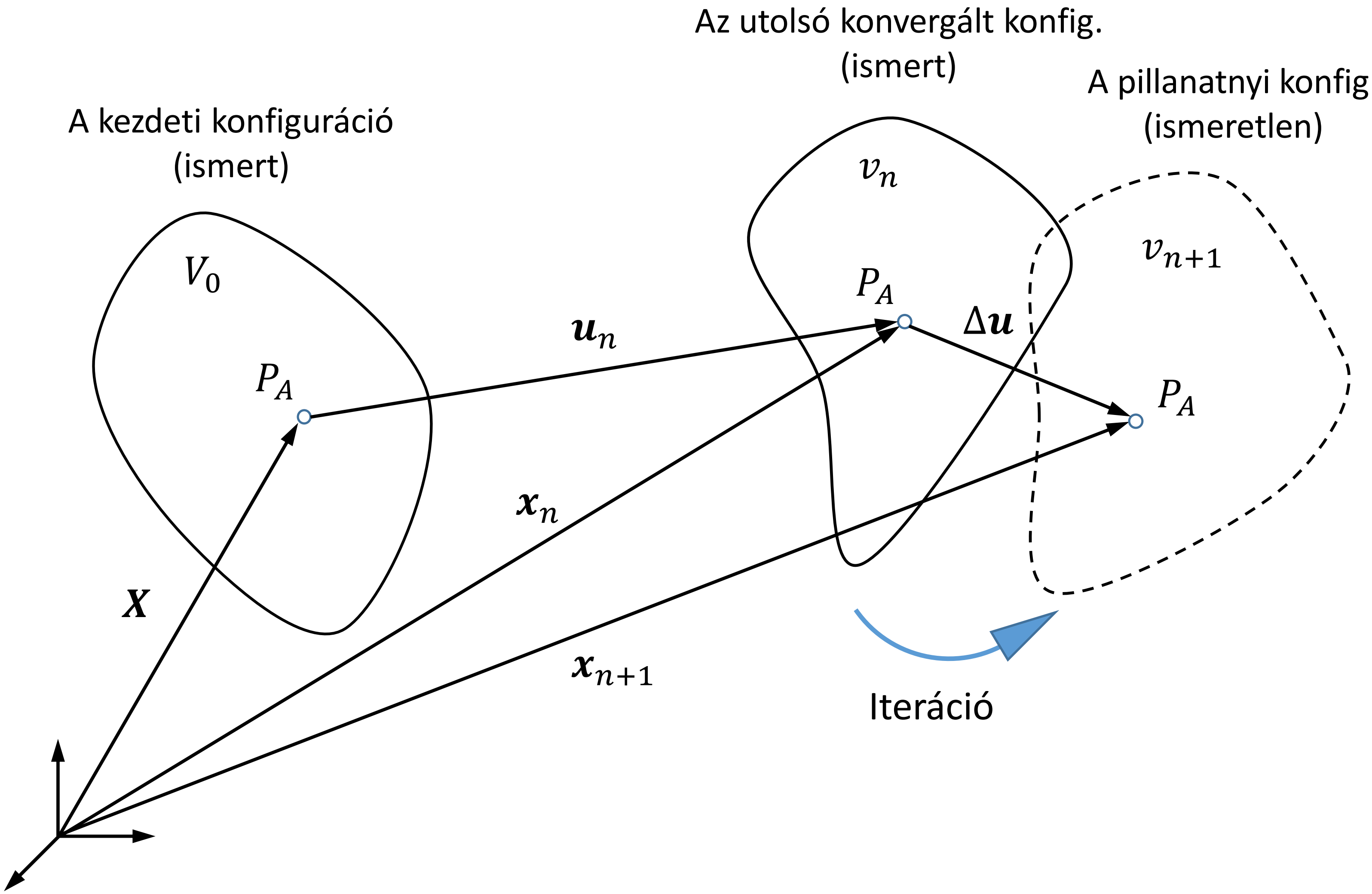
$$DIV\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_A) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_A) = \varrho \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}_A)$$

$$\sum_{B=1}^{NNA} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{P}}^{AB} \cdot \big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_B) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_A)\big) \cdot \Delta V_B + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_A) = \varrho \cdot \ddot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}_A)$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{P}}^{AB} = \begin{bmatrix} D_{1B} & 0 & D_{2B} & 0 \\ 0 & D_{1B} & 0 & D_{2B} \end{bmatrix}$$

* Guy L. Bergel, Shaofan Li, The total and updated lagrangian formulations of state-based peridynamics, Comput Mech., 11. May 2016

Az implicit megoldó levezetése



Az implicit megoldó levezetése

A virtuális munka tétele:

$$\delta W(\boldsymbol{u}) = \int_V \boldsymbol{S}:\delta\boldsymbol{E}dV - \int_V \boldsymbol{f}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}dV - \int_{\partial V} \boldsymbol{t}_0 \cdot \delta\boldsymbol{u}dV = 0$$

$$a(\boldsymbol{u},\delta\boldsymbol{u}) - l(\delta\boldsymbol{u}) = 0$$

δW: a virtuális munka,
$\boldsymbol{S}$: a második Piola-Kirchoff feszültség,
$\boldsymbol{E}$: a Green-Lagrange nyúlás,
V: a test térfogata a kezdeti konfigurációban,
$\boldsymbol{f}_0$: a térfogati terhelés a kezdeti konfigurációban,
$\boldsymbol{t}_0$: a felületi terhelés a kezdeti konfigurációban,
$\boldsymbol{u}$: az elmozdulásmező,
$\delta\boldsymbol{u}$: a virtuális elmozdulás.

Az implicit megoldó levezetése

A növekményes Newton-Raphson eljárás:

- A pillanatnyi teherlépés legyen n és a pillanatnyi iteráció legyen k.
- A k. iteráció maradékát jelölje:

$$R\left(\boldsymbol{u}_n^k\right) = \; a\left(\boldsymbol{u}_n^k, \delta\boldsymbol{u}\right) - l(\delta\boldsymbol{u})$$

- A maradékot az $\boldsymbol{u}^k$ iteráció körül linearizálva:

$$R\left(\boldsymbol{u}^{k+1}\right) \approx R\left(\boldsymbol{u}^k\right) + \left[\frac{\partial R\left(\boldsymbol{u}^k\right)}{\partial\boldsymbol{u}}\right]^T \cdot \Delta\boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{0}$$

- Az iterációs algoritmus:

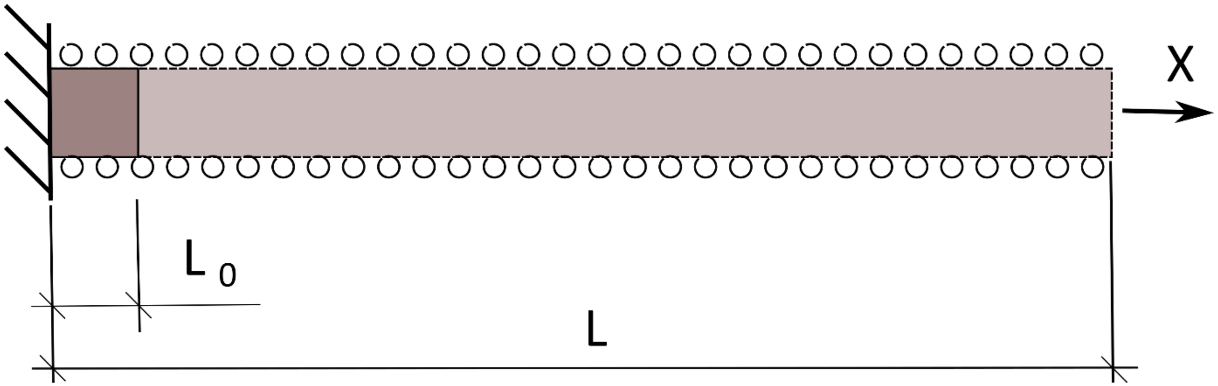
$$\left[\frac{\partial R\left(\boldsymbol{u}^k\right)}{\partial\boldsymbol{u}}\right]^{-T} \cdot \Delta\boldsymbol{u}^k = -R\left(\boldsymbol{u}^k\right)$$

$$\boldsymbol{K}_T^k \cdot \Delta\boldsymbol{u}^k = \boldsymbol{F}_n^{ext} - \boldsymbol{F}_n^{k,int}$$

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}^k + \Delta\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{k}}$$
$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{k+1}$$
$$\boldsymbol{F}^{k+1} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{F}}^A \cdot \boldsymbol{x}^{A,k+1}$$

…

Példa: Húzásnak kitett lemez



<u>Adatok:</u>

Az eredeti geometria:

$$L_0 = 2[mm]$$
$$H_0 = H = 2[mm]$$

Az anyag: St. Venant–Kirchhoff

$$\lambda = 100[MPa]$$
$$\mu = 50[MPa]$$

A pillanatnyi állapot:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}) = \begin{Bmatrix} X_1^4 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

<u>Cél</u>

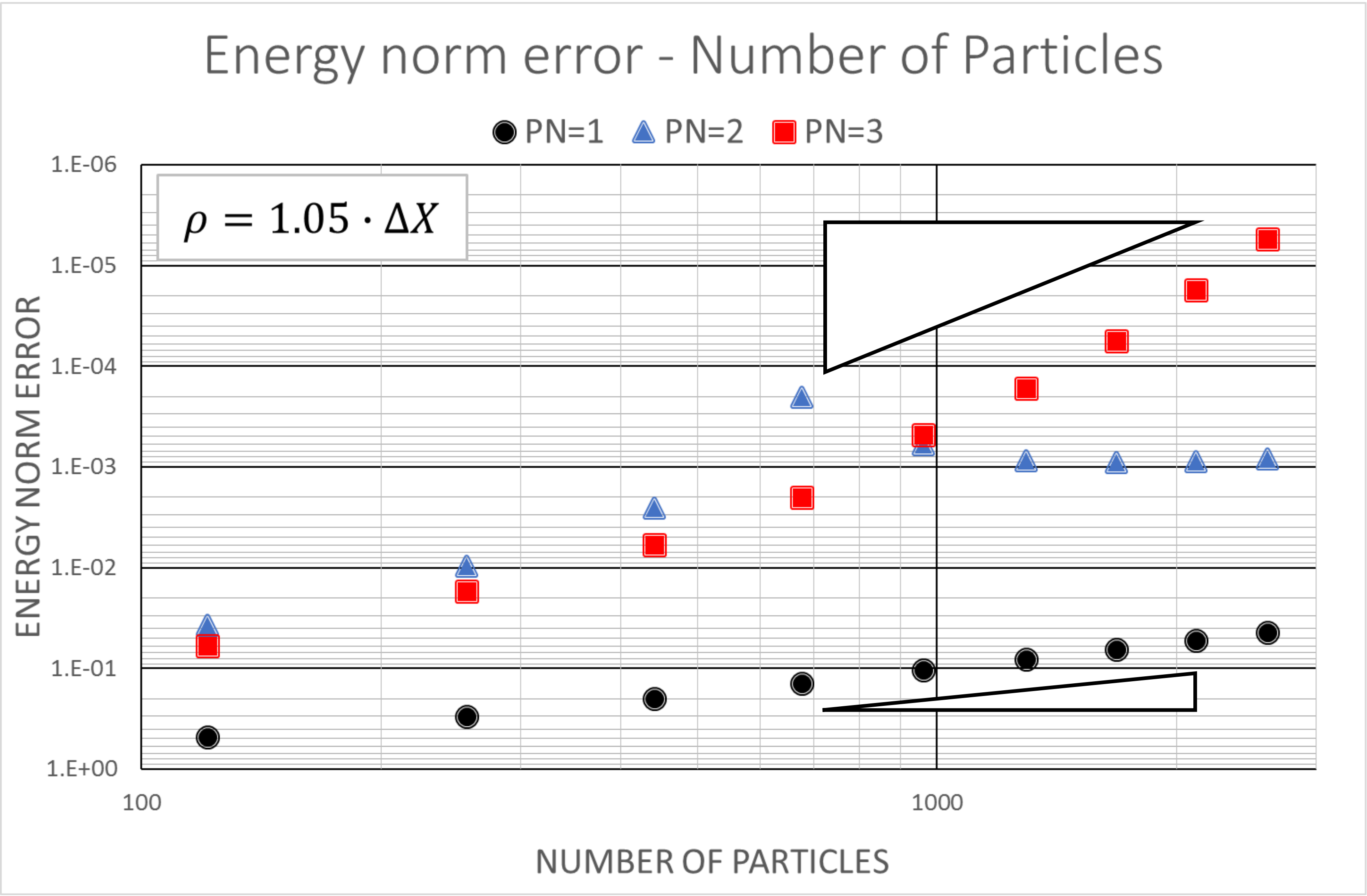
A peridinamikus megoldás konvergenciájának vizsgálata.

<u>Megoldás</u>

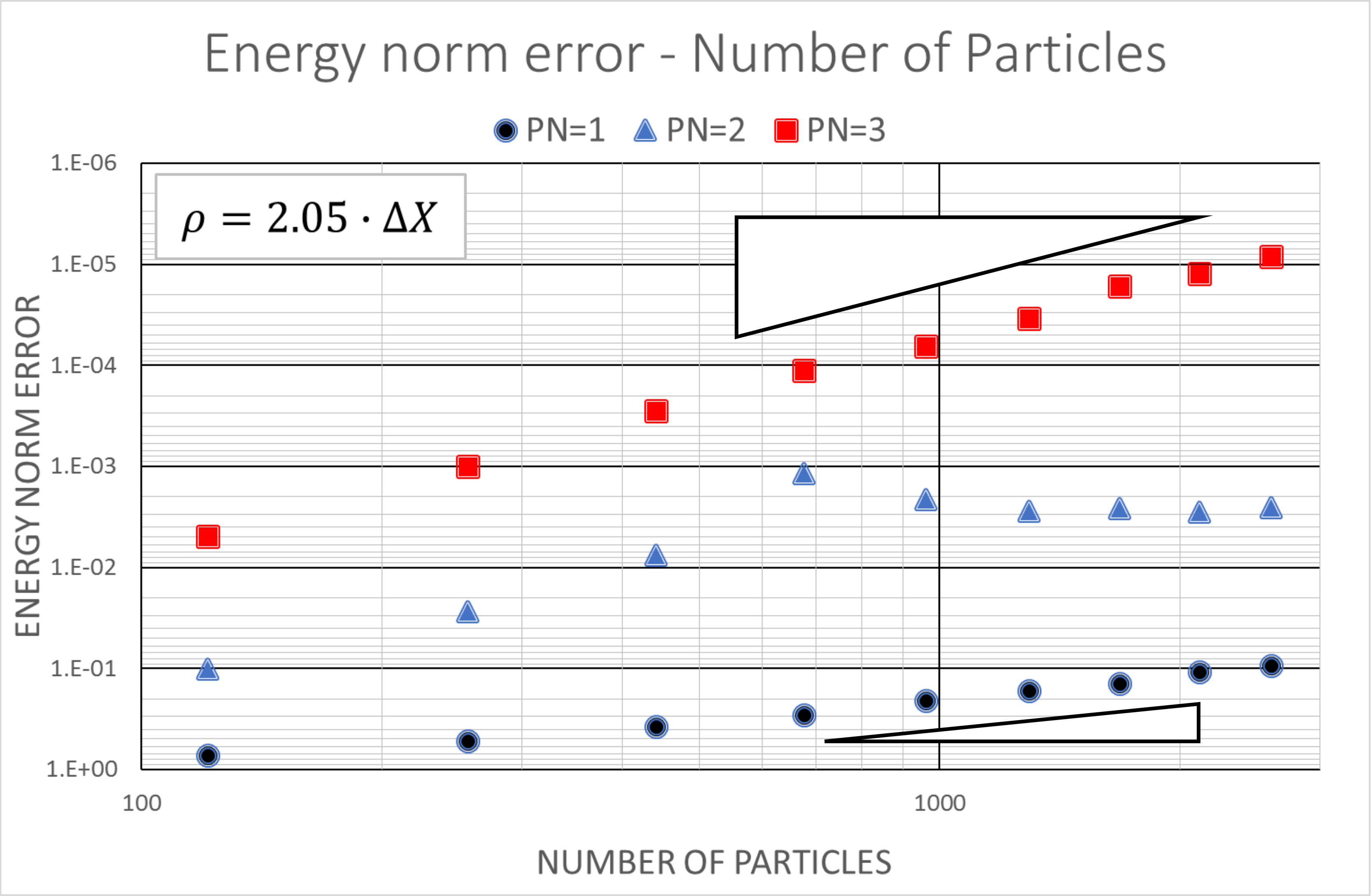
1. Az analitikus eredmények meghatározása: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X}), W_{\boldsymbol{int,a}}$
2. A peridinamikus megoldás implicit meghat.: $\widetilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X})$,.., $W_{\boldsymbol{int,PD}}$
3. Az peridinamikus megoldás hibájának kiszámítása:

$$e_{PD} = \left| \frac{W_{\boldsymbol{int,a}} - W_{\boldsymbol{int,PD}}}{W_{\boldsymbol{int,a}}} \right|$$

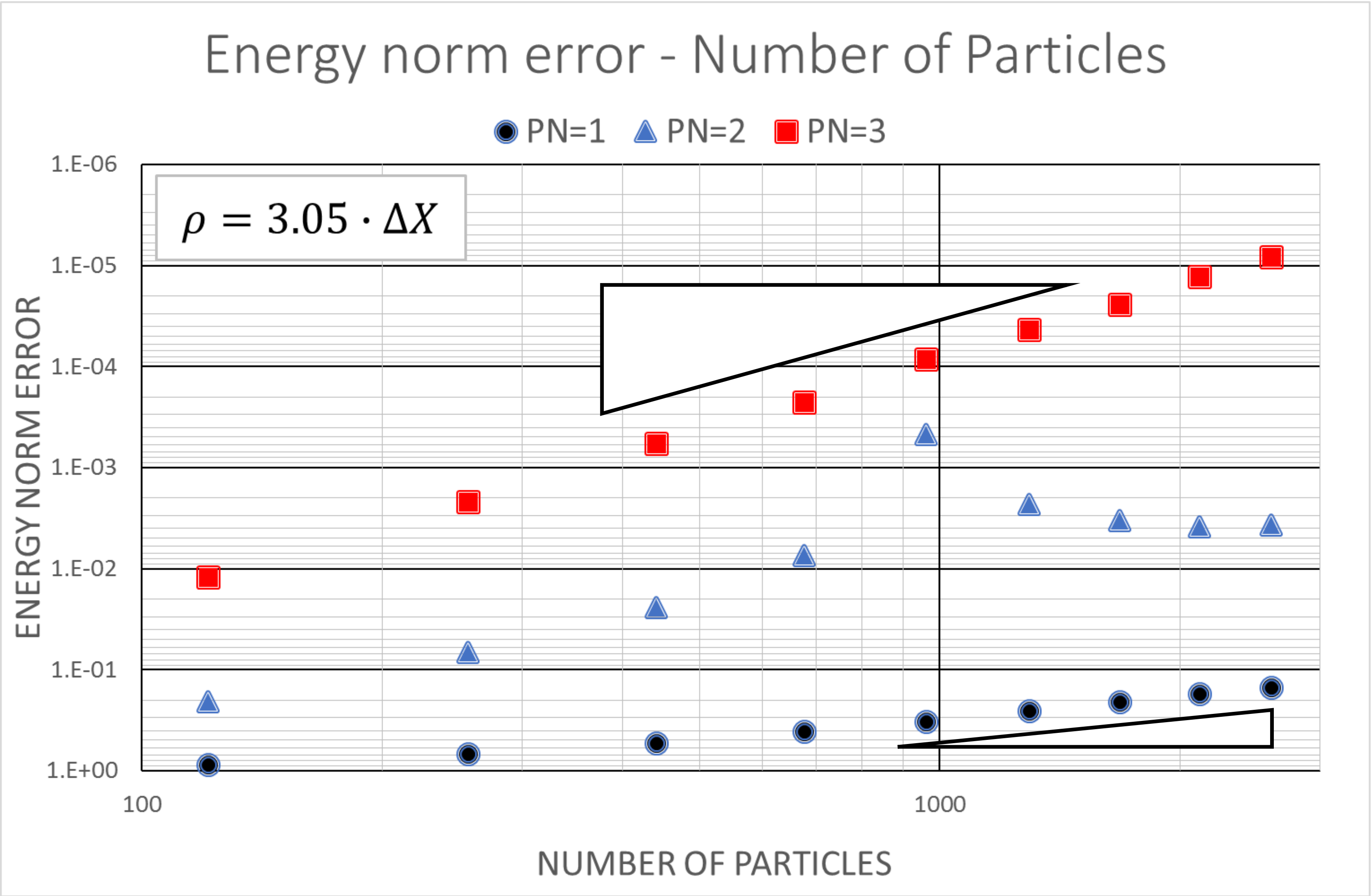
Példa: Az emelt fokszámú közelítés hatása



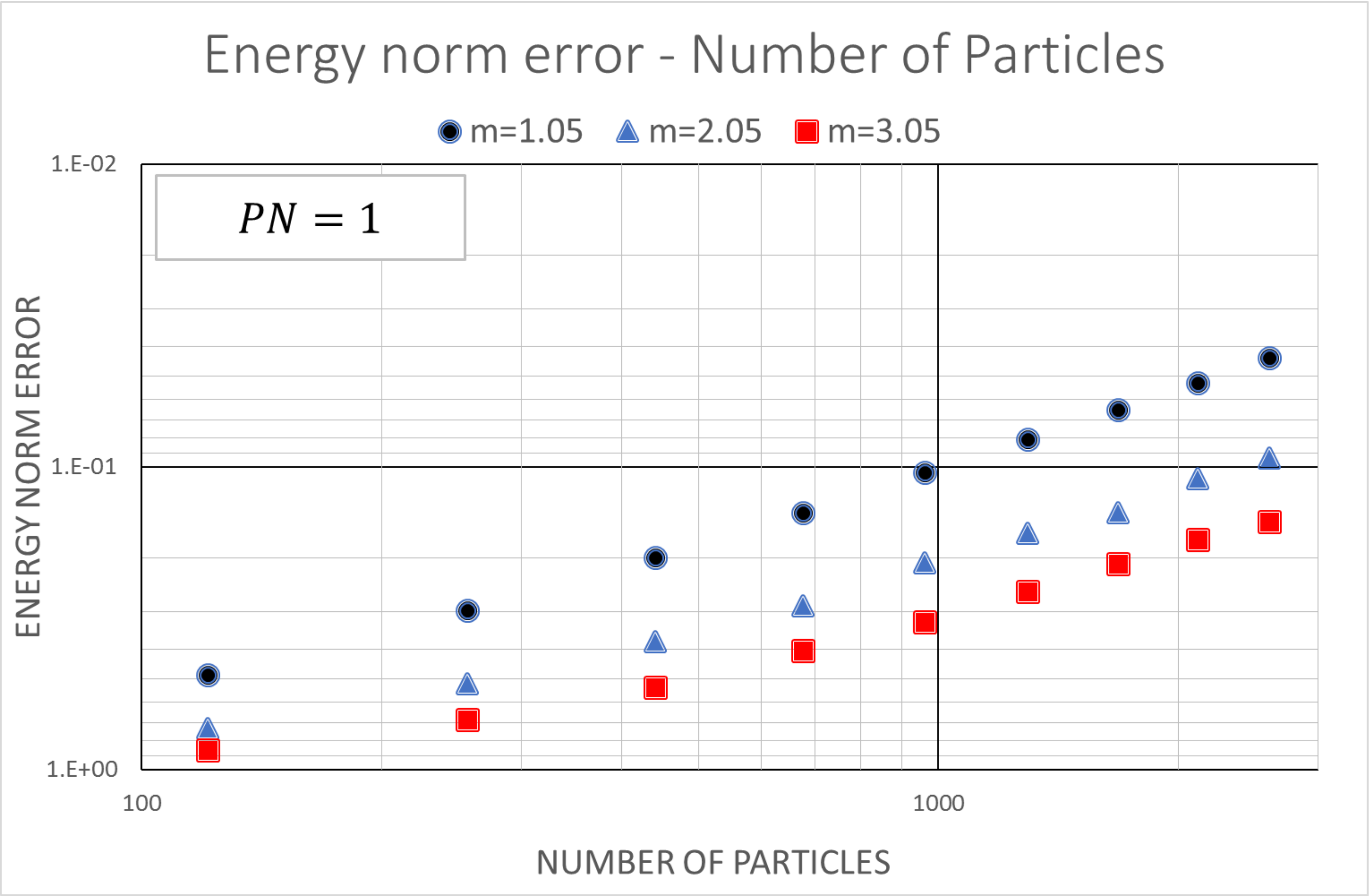
Példa: Az emelt fokszámú közelítés hatása



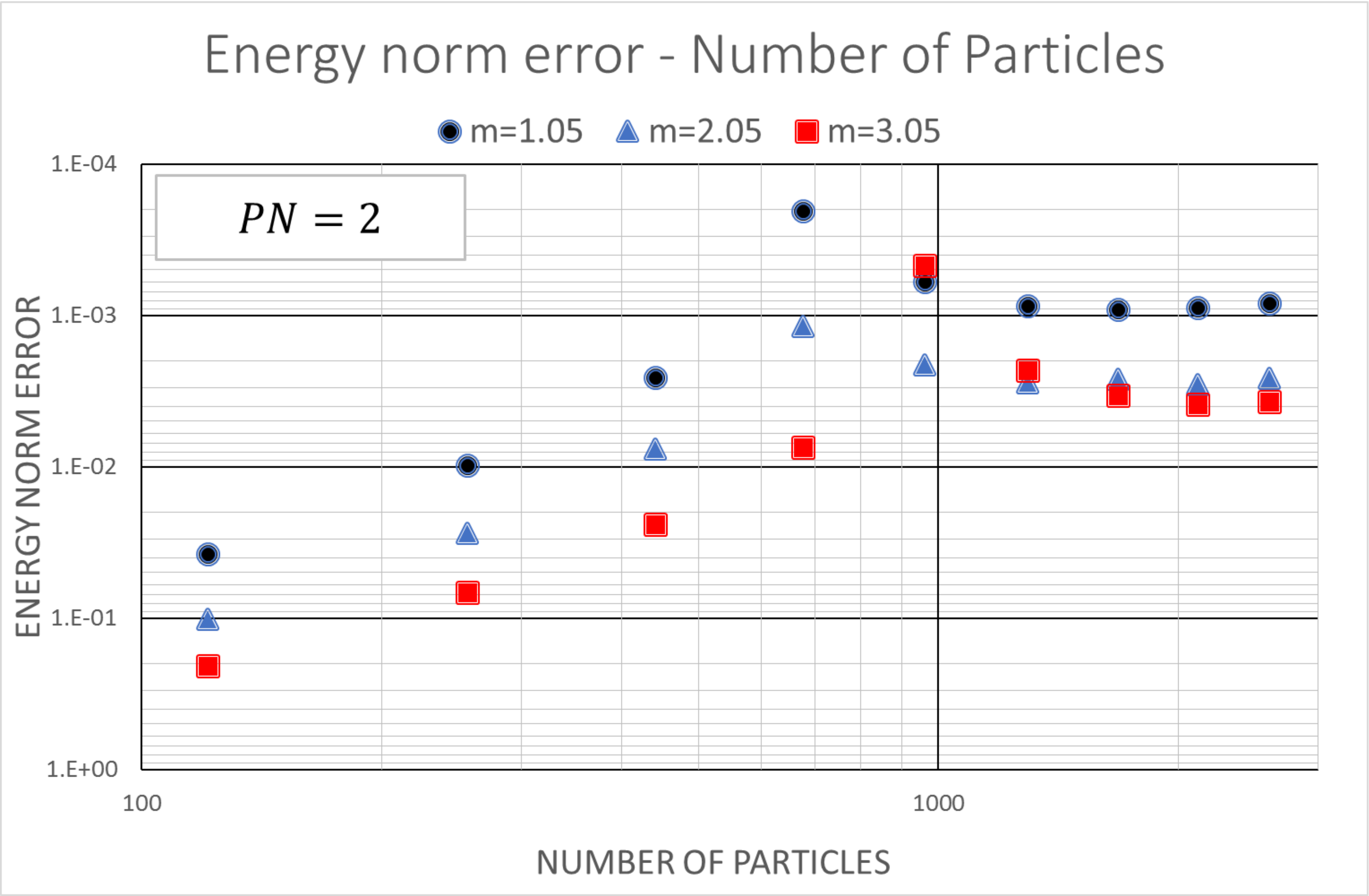
Példa: Az emelt fokszámú közelítés hatása



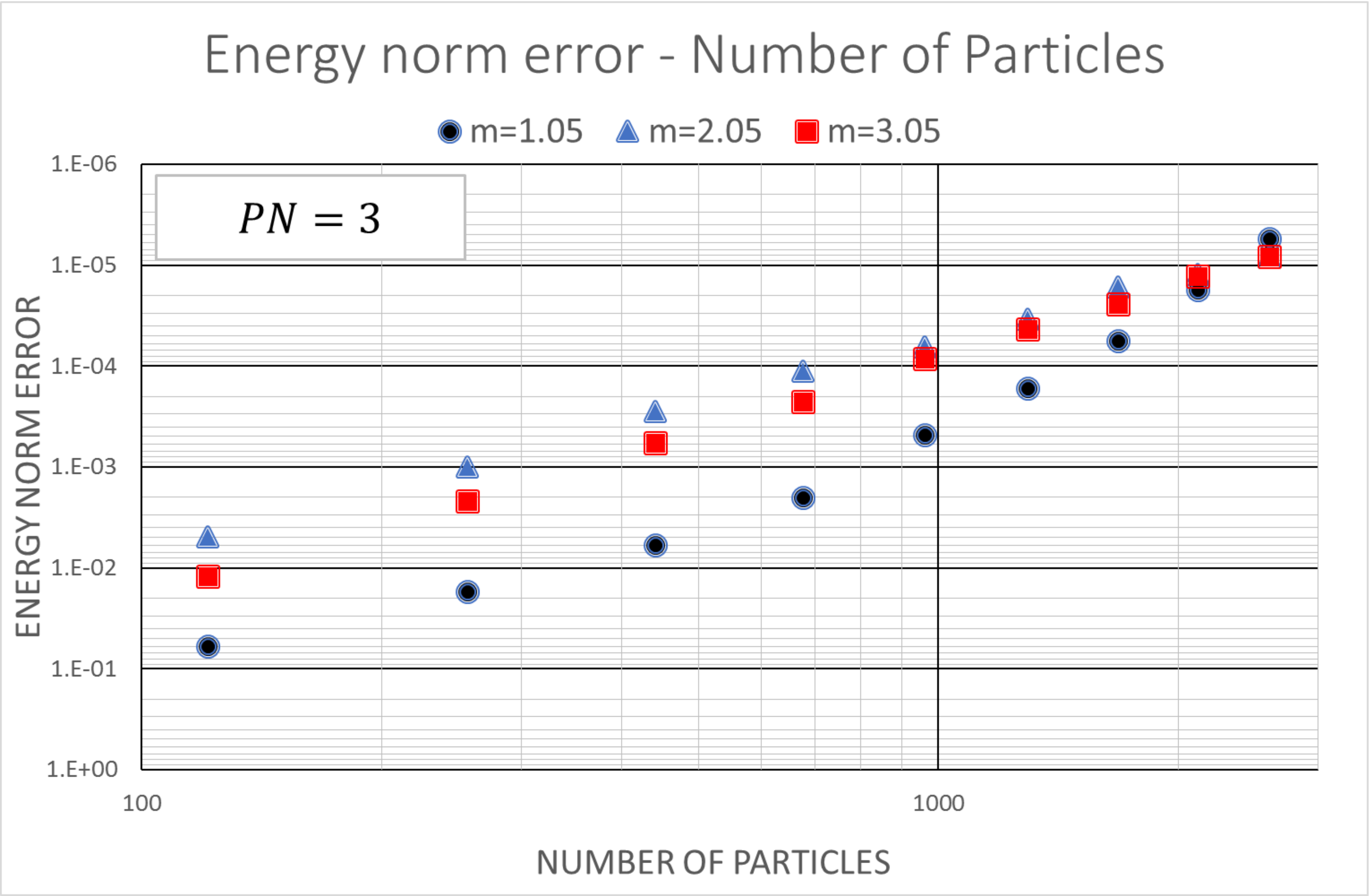
Példa: Az m-konvergencia



Példa: Az m-konvergencia



Példa: Az m-konvergencia



Összefoglalás

Összefoglalás

- Nagy elmozdulásokkal és alakváltozásokkal járó probléma megoldása 1. fokú (szokásos) NOSBPD-vel.
- Magasabb fokú peridinamikus differenciál operátor bevezetése (NOPBPD).
- Implicit megoldó levezetése.
- A peridinamikus paraméterek (NN, NP, m) hatásának vizsgálata erősen nemlineáris problémán.

Eredmények

- Az 1. fokú (szokásos) NOSBPD pontatlan eredményre vezethet az alakváltozási gradiens és más mechanikai jellemzők meghatározása során.
- A magasabb fokú PDO megoldást jelent erre.
- A magasabb fokú PDO alkalmazásával levezetett implicit Newton-Raphson megoldó konvergens eredményre vezet.

Összefoglalás

<u>Publikáció</u>

- Kapcsolt hőrugalmas probléma megoldása:

  EuroSimE2018 – Toulouse – 2018.04.

  Dunakavics folyóirat – 2018.07.
- Hiperelasztikus probléma megoldása:

  ESMC2018 – Bologna – 2018.07.

  IWCMM – Glasgow – 2018.10.

<u>Kutatás</u>

- Képlékeny anyagmodellek adaptálása és alkalmazása.
- Implicit-explicit megoldó nagy alakváltozásokkal járó repedésterjedés megoldására.

<u>Oktatás</u>

- Statika,
- Károsodás elmélet és szerk. integritás.

Köszönöm a figyelmet!

E-mail: *ladanyi@uniduna.hu*